Fachhochschule Oldenburg/Ostfriesland/Wilhelmshaven
Fachbereich Ingenieurwissenschaften
Prof. Dr. U. Totzek

Wintersemester 2003/04

(16 Punkte)

PRÜFUNGSKLAUSUR THEORETISCHE ELEKTROTECHNIK

Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlungen
Hinweis: Geben Sie für jede Aufgabe mindestens ein Blatt mit Aufgabennummer, Name und Matrikelnummer ab.
Beschreiben Sie Lösungsblätter nur einseitig.

Aufgabe 1: Zeitkontinuierliche Fourieranalyse. (4)

++ a) Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten a_1 des Signals $x(t) = e^{-t}$ für $0 \le t < 1$ mit der Periode $T = 1$.

++ b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $X(\omega)$ des Signals $x(t) = e^{-t} u(t)$.

Aufgabe 2: Zeitdiskrete Fourieranalyse. (4)

+ a) Untersuchen Sie das Signal $x(n) = 5 \sin(5{,}1 \cdot n\pi)$ auf Periodizität und bestimmen Sie ggf. die Periode.

+++b) Ein zeitdiskretes Signal $x(n)$ besitze die Fouriertransformierte $X(\Omega)$ mit $X(\Omega) = 1$, für $|\Omega| \le (\pi / 2)$, und $X(\Omega) = 0$, für $(\pi / 2) < |\Omega| < \pi$. Berechnen Sie $x(1)$, $x(2)$ und $x(3)$.

Aufgabe 3: Komplexe Frequenzen. (4)

++ a) Das komplexe zeitkontinuierliche Signal $x(t) = A\,e^{st}$ besitze die reelle Darstellung $\mathrm{Re}\,x(t) = 2\,e^{-t}\cos(10t + \pi/2)$. Berechnen Sie die komplexe Amplitude A und die komplexe Frequenz s.

++ b) Gegeben sei das komplexe zeitdiskrete Signal $x(n) = A\,z^n$ mit $A = z = (1/2)\,e^{j(\pi/3)}$. Berechnen Sie $\mathrm{Re}\,x(n)$.

Aufgabe 4: Symmetrische Komponenten. (4)

++ a) Ein Drehstromsystem sei durch den transformierten Spannungsvektor $U' = s^{-1} U = (0\,,\,0\,,\,100+j100)^T$ beschrieben. Berechnen Sie für das Zeigerbild des Drehstromsystems mit dem Spannungsvektor U die jeweiligen Zeigerlängen sowie die Winkel in Grad.

++ b) Wie ändert sich der transformierte Spannungsvektor U' eines symmetrischen Drehstromsystems mit $U = (1\,,\,a^2\,,\,a)^T$, wenn die erste der drei Spannungskomponenten wegfällt, d.h. wenn gilt $U = (0\,,\,a^2\,,\,a)^T$. Berechnen Sie U' für beide Fälle.

Hinweis: $$s^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}.$$

WS' 03/04
(16 Punkte)

(4)

Lösung Aufgabe 1:

++ a) $x(t) = e^{-t}, \; 0 \leq t < 1, \quad T = 1$

$$\boxed{a_1} = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)\, e^{-j\omega_0 t}\, dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

$$= \int_0^1 e^{-t} e^{-j2\pi t}\, dt = \int_0^1 e^{t(-1-j2\pi)}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{-1-j2\pi}\, e^{t(-1-j2\pi)}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{-1-j2\pi}\left(\underbrace{e^{-1-j2\pi}}_{e^{-1} e^{-j2\pi} = e^{-1}} - 1\right)$$

$$= \boxed{\frac{1-e^{-1}}{1+j2\pi}}$$

++ b) $x(t) = e^{-t} u(t)$

$$\boxed{X(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{t(-1-j\omega)}\, dt = \left[\frac{1}{-1-j\omega}\, e^{t(-1-j\omega)}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{-1-j\omega}\,(0-1) = \boxed{\frac{1}{1+j\omega}}$$

Lösung Aufgabe 2: (4)

+ a) $x(n) = 5\sin(5{,}1 \cdot n\pi) \Rightarrow \Omega = 5{,}1\pi$

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\cancel{\pi} \cdot 10}{51 \cdot \cancel{\pi}} = \frac{20}{51}$$

$$N = k \cdot \frac{20}{51} \overset{k=51}{\Longrightarrow} \boxed{N = 20}$$

+++ b) $X(\Omega) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{jn} e^{j\Omega n} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi \cancel{j} n} \underbrace{\left(e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}} \right)}_{\cancel{2j} \sin n\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(1) &= \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi} \\ x(2) &= \frac{1}{2\pi} \sin \pi = 0 \\ x(3) &= \frac{1}{3\pi} \sin 3\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{3\pi} \end{aligned}}$$

Lösung Aufgabe 3:

++ a) $x(t) = A e^{st}$, $A = a e^{j\varphi}$, $s = \sigma + j\omega$

$$x(t) = a e^{j\varphi} e^{(\sigma + j\omega)t} = a e^{\sigma t} e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

$$\mathrm{Re}\, x(t) = a e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\overset{!}{=} 2 e^{-t} \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 2 e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad s = -1 + j10}$$

++ b) $x(n) = A z^n$, $A = z = \frac{1}{2} e^{j\pi/3}$

$$x(n) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} \left[\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}}\right]^n$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{j\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{j\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\, x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot n + \frac{\pi}{3}\right)}$$

Lösung Aufgabe 4:

WS 03/04

(4)

++ a) $u' = S^{-1} u = (0, 0, 100 + j100)^T$

$$\boxed{u = S u'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 + j100 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 100 + j100 \\ a(100 + j100) \\ a^2(100 + j100) \end{pmatrix} = \sqrt{2}\,100 \begin{pmatrix} e^{j45^\circ} \\ e^{j45^\circ} \cdot e^{j120^\circ} \\ e^{j45^\circ} \cdot e^{j240^\circ} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= 100\sqrt{2} \begin{pmatrix} e^{j45^\circ} \\ e^{j165^\circ} \\ e^{j285^\circ} \end{pmatrix}}$$

++ b) 1.) $u = (1, a^2, a)^T$

$$\boxed{u' = S^{-1} u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + a^2 + a \\ 1 + a^3 + a^3 \\ 1 + a^4 + a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2.) $u = (0, a^2, a)^T \qquad a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{u'} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a^2 + a \\ a^3 + a^3 \\ a^4 + a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}}$$