Fachhochschule Oldenburg/Ostfriesland/Wilhelmshaven
Fachbereich Ingenieurwissenschaften
Prof. Dr. U. Totzek

Wintersemester 2003/04

(17 Punkte)

PRÜFUNGSKLAUSUR MATHEMATIK III

Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Taschenrechner und Formelsammlungen
Hinweis:	Geben Sie für jede Aufgabe mindestens ein Blatt mit Aufgabennummer, Name und Matrikelnummer ab. Beschreiben Sie Lösungsblätter nur einseitig.

Aufgabe 1: Fourierreihen. (3)

Für eine periodische Zeitfunktion $x(t)$ mit der Periode $T=2$ gelte $x(t)=2$ für $0 \leq t < 1$ und $x(t)=0$ für $1 \leq t < 2$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_n, für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ usw. mit Hilfe der entsprechenden **Integralformeln**.

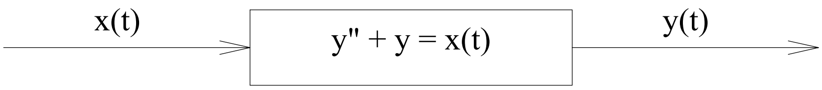
Aufgabe 2: Differentialgleichungen 1. Ordnung. (7)

++ a) Lösen Sie die DGL $xy' + xy = y$ durch **Substitution**.

++ b) Lösen Sie die DGL $y' - 2y = 2y \cos x$ durch**Variablentrennung**.

+++ c) Lösen Sie die DGL $y - x^3 = -y'$ durch **Aufsuchen einer partikulären Lösung**.

Aufgabe 3: Differentialgleichungen 2. Ordnung. (7)



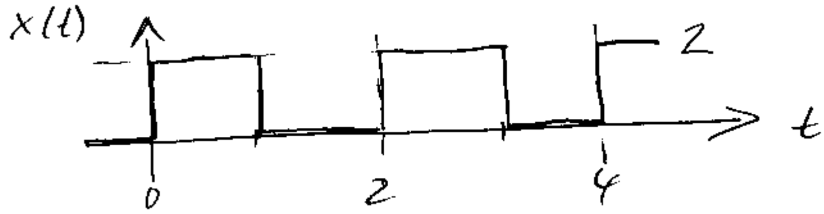
+++ a) Ein System mit dem Eingangssignal $x(t)$ und dem Ausgangssignal $y(t)$ sei durch die DGL $y'' + y = x(t)$ beschrieben. Berechnen Sie die **Phasenverschiebung** φ des Systems für $x(t) = \sin 3t$ durch **Lösen der DGL**.

++++ b) Berechnen Sie die **allgemeine Lösung** der DGL $y'' + y' + 1 = \sin x$ und kontrollieren Sie das Ergebnis durch **Einsetzen in die DGL.**

WS' 03/04

Lösung Aufgabe 1: (3)

$$x(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2 \end{cases} \qquad T = 2$$



$$\boxed{a_0} = \frac{2}{T} \int_{(T)} x(t)\,dt = \int_0^1 2\,dt = \boxed{2}$$

$$\boxed{a_n} = \frac{2}{T} \int_{(T)} x(t) \cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \int_0^1 2 \cos(n\pi t)\,dt$$

$$= 2 \left[\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t) \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left(\sin n\pi - \sin 0 \right) = \boxed{0}$$

Lösung Aufgabe 7: (7)

++ a) $xy' + xy = y$

$y' + y = \frac{y}{x}$

$u = \frac{y}{x}$

$y = ux$

$y' = u + u'x$

DGL: $u + u'x + ux = u$

$u'x + ux = 0$

$u' + u = 0$

$\Rightarrow u(x) = C' e^{-x}, \ C' \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = C' x e^{-x}, \ C' \in \mathbb{R}}$

++ b) $y' - 2y = 2y \cos x$

$y' = 2y \cos x + 2y = 2y(\cos x + 1)$

$\frac{dy}{dx} = 2y(\cos x + 1)$

$\int \frac{1}{2y}\, dy = \int (\cos x + 1)\, dx$

$\frac{1}{2} \ln|C'y| = \sin x + x$

$\ln|C'y| = 2 \sin x + 2x$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = K e^{2\sin x + 2x}, \ K \in \mathbb{R}}$

WS' 03/04

Lösung Aufgabe 2c:

+++

$$y - x^3 = -y'$$

$$y' + y = x^3$$

1.) $y' + y = 0$: $\boxed{y_0(x) = A e^{-x}, \ A \in \mathbb{R}}$

2.) $y' + y = x^3$

Ansatz: $y(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$y'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

DGL: $3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$= x^3 (a_3) + x^2 (3a_3 + a_2) + x (2a_2 + a_1) + (a_1 + a_0) \overset{!}{=} x^3$$

$\Rightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$3a_3 + a_2 = 3 + a_2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = -3}$

$2a_2 + a_1 = -6 + a_1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 6}$

$a_1 + a_0 = 6 + a_0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = -6}$

$$\boxed{y(x) = A e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \ A \in \mathbb{R}}$$

Lösung Aufgabe 3: WS 03/04 (7)

+++ a) $y'' + y = \sin 3t$

Phasenverschiebung aus partikulärer Lsg.

Ansatz: $y(x) = A \sin(3t + \varphi)$

$y'(x) = 3A \cos(3t + \varphi)$

$y''(x) = -9A \sin(3t + \varphi)$

DGL: $-9A \sin(3t + \varphi) + A \sin(3t + \varphi)$

$= -8A \sin(3t + \varphi) \stackrel{!}{=} \sin 3t$

$\Rightarrow$ 1.) $-8A = 1$ $\boxed{A = -\frac{1}{8}}$

2.) $\boxed{\varphi = 0}$

Keine Phasenverschiebung!

$\boxed{y_p(x) = -\frac{1}{8} \sin 3t}$

++ ++ b) $y'' + y' + 1 = \sin x$

$y'' + y' = \sin x - 1$

1.) $y'' + y' = 0$

$\lambda^2 + \lambda = 0$, $(\lambda - 0)(\lambda + 1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$

$\boxed{y_0(x) = A + Be^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}}$

WS 03/04

2.) $y'' + y' = \sin x - 1$

Ansatz: • $0 \pm j \cdot 1$ nicht Lsg. d. char. Gl.
• y-Term fehlt

$$\Rightarrow y(x) = a \sin x + b \cos x + \underbrace{cx}_{x \cdot P_0(x)}$$

$$y'(x) = a \cos x - b \sin x + c$$

$$y''(x) = -a \sin x - b \cos x$$

DGL: $-a \sin x - b \cos x + a \cos x - b \sin x + c$

$$= \sin x(-a-b) + \cos x(-b+a) + c \overset{!}{=} \sin x - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -1}$$

$$-b + a = 0 \Rightarrow \underline{a = b}$$

$$-a - b = -2a \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \boxed{a = b = -\tfrac{1}{2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = A + Be^{-x} - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x - x \\ A, B \in \mathbb{R} \end{array}}$$

<u>Probe:</u> $y'(x) = -Be^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - 1$

$$y''(x) = Be^{-x} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

$$y''(x) + y'(x) = \sin x - 1 \quad ✓$$