

Pflichtvorlesung

Mathematik III

für Studierende
des
3. Semesters

Fachhochschule
Oldenburg/Ostfriesland/**Wilhelmshaven**

Standort Wilhelmshaven

Fachbereich Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Ahlers

Literaturhinweise

- /1/ Brauch, W.; Dreyer, H.J.; Haacke, W. :
Mathematik für Ingenieure;
Teubner Verlag, Stuttgart 1990.
- /2/ Papula, L.:
Mathematik für Ingenieure 1;
Vieweg Verlag, Braunschweig 1990.
- /3/ Papula, L.:
Mathematik für Ingenieure 2;
Vieweg Verlag, Braunschweig 1990.
- /4/ Bartsch, H.J.:
Taschenbuch mathematischer Formeln;
Hanse Verlag; Leipzig
- /5/ Bronstein, I.N; Semendjajew, K.A.:
Taschenbuch der Mathematik;
Harri Deutsch Verlag; Zürich, Frankfurt, Thun; 1977.
- /6/ Stöcker, H.:
Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren
Harri Deutsch Verlag; Thun und Frankfurt/Main; 1993.
- /7/ Gradstein; Ryschik, I.
Summen-, Produkt und Integraltafeln
Thun-Frankfurt; 1991.
- /8/ Dirschmid, H.J. :
Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik;
Vieweg Verlag, Braunschweig 1989.
- /9/ Zurmühl, R.:
Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker;
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1984.

Kommentar:

- /1/ 1. Lehrbuch in etwa Vorlesung
- /2/ und /3/ 2. Lehrbuch in etwa Vorlesung
- /4/ Übersichtliche Formelsammlung (reicht aus)
- /5/ Etwas umfangreichere Formelsammlung, schlechter lesbar.
- /6/ Kombination aus Formelsammlung und Lehrbuch. Eignet sich nicht zum Selbststudium. Wenn der Stoff einmal verstanden wurde, ist es ein hervorragendes Nachschlagewerk.
- /7/ Sehr umfangreiche Formelsammlung, insbesondere für Integrale, etwa 2000 Seiten, nur in Sonderfällen zu verwenden.
- /8/ Sehr theoretisches Werk, über Vorlesungsniveau, zur mathematischen Weiterbildung für Ingenieure bestens geeignet.
- /9/ Standardwerk der numerischen Mathematik

Ein Lehrbuch ist nicht vorlesungsbegleitend erforderlich. Allerdings ist eine Formelsammlung, insbesondere im zweiten und dritten Semester, sehr zu empfehlen.

Übersicht Mathematik I bis III

1. Semester: (8 Stunden)
 1. Algebra
 2. Funktionen
 3. Komplexe Zahlen
 4. Analytische Geometrie
 5. Grundlagen der Differentialrechnung
2. Semester: (6 Stunden)
 6. Anwendungen der Differentialrechnung
 7. Integralrechnung
 8. Reihen
3. Semester: (6 Stunden)
 9. Frequenzanalyse
 10. Differentialgleichungen
 11. Laplace Transformation

Gliederung Mathematik III

9. Frequenzanalyse
 - 9.1. Fourier-Reihen
 - 9.1.1. Einleitung
 - 9.1.2. Allgemeine Form der Fourier-Reihe
 - 9.1.3. Berechnung von Integralen
 - 9.1.4. Bestimmung der Fourier-Koeffizienten
 - 9.1.5. Beispiele
 - 9.1.6. Eigenschaften von Fourier-Reihen
 - 9.1.7. Komplexe Fourier-Reihe
 - 9.1.8. Numerische Fourier-Analyse
 - 9.2. Fourier-Integral
 - 9.3. Anwendungsbeispiel aus der Elektrotechnik für Fourier-Reihe und Fourier-Integral
 - 9.4. Zusammenfassung der wichtigsten Formeln aus Kapitel 9
10. Gewöhnliche Differentialgleichungen
 - 10.1. Einführung
 - 10.2. Klassifizierung und Definitionen
 - 10.3. DGL und Kurvenschar
 - 10.4. Ansatz und Probe
 - 10.5. Analytische Lösung für DGLn 1. Ordnung
 - 10.5.1. Trennung der Variablen
 - 10.5.2. Substitution
 - 10.5.3. Lineare DGLn 1. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten (Variation der Konstanten)
 - 10.5.4. Das totale Differential
 - 10.5.5. Integrierender Faktor
 - 10.6. Das Aufstellen von DGLn
 - 10.7. Lineare DGLn
 - 10.8. DGL-Systeme
 - 10.9. Numerische Lösung
 - 10.10. Lösung einer DGL mit Hilfe eines Reihenansatzes
 - 10.11. Linearisierung
 - 10.12. Stabile und instabile DGL
11. Laplace Transformation
 - 11.1. Einleitung
 - 11.2. Transformations-Vorschrift
 - 11.3. Definitionen von Funktionen und Operationen
 - 11.4. Laplace Transformation bekannter Funktionen
 - 11.5. Korrespondenz-Tabellen
 - 11.6. Rechenregeln
 - 11.7. Differenzieren und Integrieren von $y(t)$
 - 11.8. Lösen von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten
 - 11.9. Systeme von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten
 - 11.10. Grenzwertsätze
 - 11.11. Die Impulsfunktion $\delta(t)$

Inhaltsverzeichnis Mathematik III

9. Frequenzanalyse	1
9.1. Fourier-Reihen	3
9.1.1. Einleitung	3
9.1.1.1 Allgemeiner periodischer Verlauf in t	3
9.1.1.2 Allgemeiner periodischer Verlauf in x	3
9.1.1.3 Mathematische Beschreibung periodischer Verläufe	4
9.1.2. Allgemeine Form der Fourier-Reihe	6
9.1.3. Berechnung von Integralen	7
9.1.4. Bestimmung der Fourier-Koeffizienten	10
9.1.4.1. a_0 - Bestimmung	10
9.1.4.2. a_m - Bestimmung	11
9.1.4.3. b_m - Bestimmung	12
9.1.4.4. Zusammenfassung	13
9.1.4.5. Fourier-Reihe $f(t)$	13
9.1.5. Beispiele	14
9.1.5.1. Übungsaufgaben	15
9.1.5.2. Ergebnisse von Fourier-Reihen	20
9.1.6. Eigenschaften von Fourier-Reihen	31
9.1.6.1. Punktsymmetrie	31
9.1.6.2. Achsensymmetrie	31
9.1.6.3. Einfluß der geraden und ungeraden Oberschwingungen	32
9.1.6.4. Wert der Fourier-Reihe an Unstetigkeitsstellen	34
9.1.6.5. Konvergenz	34
9.1.6.6. a_0 - Berechnung mit Grenzwert	35
9.1.6.7. Berechnung der Zahl π	35
9.1.7. Komplexe Fourier-Reihe	36
9.1.8. Numerische Fourier-Analyse	42
9.2. Fourier-Integral	47
9.3. Anwendungsbeispiel aus der Elektrotechnik für Fourier-Reihe und Fourier-Integral	53
9.4. Zusammenfassung der wichtigsten Formeln aus Kapitel 9	57
10. Gewöhnliche Differentialgleichungen	59
10.1. Einführung	59
10.2. Klassifizierung und Definitionen	61
10.2.1. Abhängige und unabhängige Variable	61
10.2.2. Ordnung der DGL	61
10.2.3. Lineare und nichtlineare DGL	61
10.2.4. Homogene und nicht homogene DGL	62
10.2.5. Art der Koeffizienten	62
10.2.6. Integrationskonstanten, Anfangs- und Randwerte	63
10.2.7. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen	65
10.2.8. Beispiele Klassifizierung	66
10.3. DGL und Kurvenschar	67
10.3.1. Kurvenschar einer DGL	67
10.3.2. Ableitung der DGL aus einer gegebenen Kurvenschar	71
10.4. Ansatz und Probe	74
10.4.1. Probe	74
10.4.2. Ansatz einer Lösungsfunktion	75
10.5. Analytische Lösung für DGLn 1. Ordnung	76
10.5.1. Trennung der Variablen	76
10.5.2. Substitution	79
10.5.2.1. DGLn vom Typ: $y' = f(ax + by + c)$	79
10.5.2.2. DGLn vom Typ: $y' = f(y/x)$	80
10.5.3. Lineare DGLn 1. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten (Variation der Konstanten)	81
10.5.4. Das totale Differential	85
10.5.5. Integrierender Faktor	87
10.6. Das Aufstellen von DGLn	91
10.7. Lineare DGLn	96
10.7.1. Lineare DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	96
10.7.2. Lineare DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	109

10.7.3. Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	117
10.8. DGL-Systeme	121
10.8.1. Umformung von DGLn n-ter Ordnung nach n DGLn 1. Ordnung	121
10.8.2. Umformung von n DGLn 1. Ordnung zu einer DGL n-ter Ordnung	124
10.9. Numerische Lösung	126
10.9.1. Streckenzugverfahren nach Euler (Rechteckregel)	126
10.9.1.1. Rechteckregel für DGL 1. Ordnung	126
10.9.1.2. Rechteckregel für DGLn höherer Ordnung	130
10.9.2. Verbesserte Verfahren	132
10.9.3. Runge-Kutta-Verfahren	133
10.9.3.1. Runge-Kutta-Verfahren für DGL 1. Ordnung	133
10.9.3.2. Runge-Kutta-Verfahren für DGLn höherer Ordnung	136
10.9.4. Hinweise	141
10.9.4.1. Wahl des Verfahrens	141
10.9.4.2. Wahl der Schrittweite	141
10.9.4.3. Programmierung	141
10.9.4.4. Nichtlineare DGLn	141
10.10. Lösung einer DGL mit Hilfe eines Reihenansatzes	142
10.11. Linearisierung	153
10.12. Stabile und instabile DGL	163
11. Laplace Transformation	167
11.1. Einleitung	167
11.2. Transformations-Vorschrift	169
11.3. Definitionen von Funktionen und Operationen	171
11.3.1. Sprung-Funktion $s(t)$	171
11.3.2. Rampen-Funktion $r(t)$	171
11.3.3. Potenzfunktion	171
11.3.4. Verschiebung in positiver t-Richtung	172
11.3.5. Übungen zu 11.3.1 bis 11.3.4	172
11.3.6. Faltungintegral	175
11.4. Laplace Transformation bekannter Funktionen	177
11.5. Korrespondenz-Tabellen	182
11.6. Rechenregeln	185
11.6.1. Summe von Funktionen	185
11.6.2. Multiplikative Konstante	185
11.6.3. Additive Konstante	185
11.6.4. Ähnlichkeitssatz	187
11.6.5. Verschiebungssatz	188
11.6.6. Dämpfungssatz	191
11.6.7. Faltungssatz	192
11.7. Differenzieren und Integrieren von $y(t)$	196
11.7.1. Differentiation	196
11.7.2. Integration	198
11.8. Lösen von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten	200
11.8.1. DGLn 1. Ordnung	200
11.8.2. Rücktransformation durch Partialbruchzerlegung	202
11.8.2.1. Nullstellenbestimmung	202
11.8.2.2. Ansätze für die verschiedenen Arten von Nullstellen	203
11.8.2.3. Bestimmung der Koeffizienten A_i	204
11.8.2.3.1. Zuhaltmethode	204
11.8.2.3.2. Methode: Bestimmte Zahlenwerte einsetzen	205
11.8.2.3.3. Methode: Koeffizienten Vergleich (Gleichungssystem aufstellen)	206
11.8.2.4. Rücktransformation in den Zeitbereich	207
11.8.2.4.1. Einfach reelle Nullstelle	207
11.8.2.4.2. Mehrfach reelle Nullstelle	207
11.8.2.4.3. Einfach konjugiert komplexe Nullstelle	208
11.8.2.4.4. Zweifach konjugiert komplexe Nullstelle	209
11.8.3. DGLn n-ter Ordnung	211
11.9. Systeme von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten	217
11.9.1. n-verkoppelte DGLn 1. Ordnung	217
11.9.2. Diskrete Werte-Berechnung	219

11.9.3. Gekoppelte DGLn höherer Ordnung	221
11.10. Grenzwertsätze	223
11.11. Die Impulsfunktion $\delta(t)$	224
Anhang	226
Aufgaben	226
Ergebnisse	237

9. Frequenzanalyse

In der Wechselstromlehre erfolgt für lineare Netzwerke die Berechnung mit Hilfe der komplexen Rechnung. Als Anregung (z.B. Spannungsquelle) ist dabei eine harmonische (sinusförmige) physikalische Größe nur einer Frequenz vorhanden. Ist die Anregung nicht sinusförmig, muß diese Anregung auf die Komponenten der Frequenz untersucht werden. Die Auswirkungen der berechneten Frequenzkomponenten müssen anschließend einzeln als Anregung auf das Netzwerk untersucht werden. Bei linearen Netzwerken gilt das Überlagerungsprinzip. Somit müssen die einzelnen berechneten Auswirkungen überlagert werden.

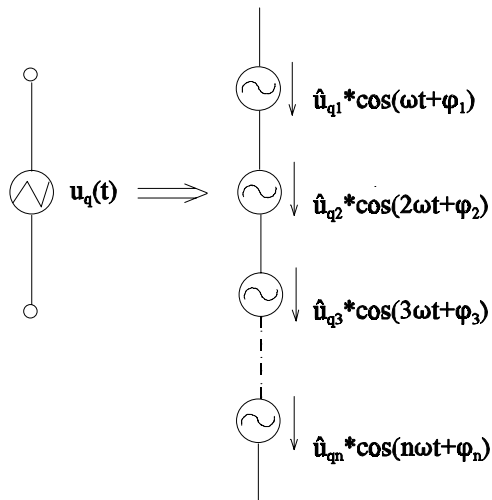


Bild MA9A: Umwandlung einer allgemeinen Spannungsquelle in die Frequenzkomponenten

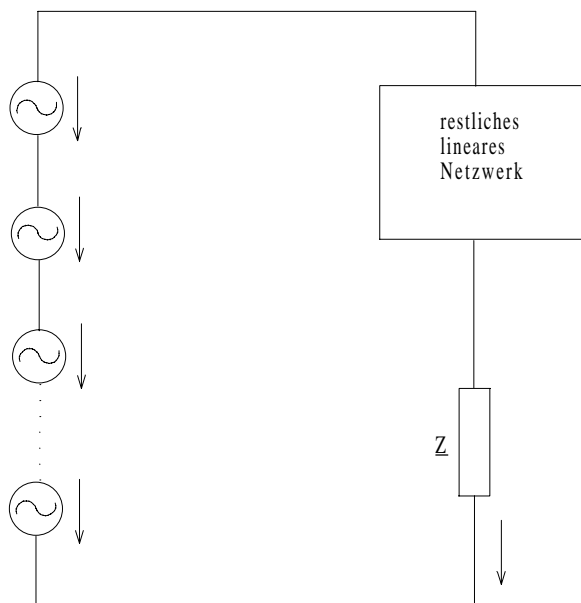


Bild MA9B: Berechnung linearer Netzwerke mittels Überlagerung

Die oben beschriebene Aktion soll in den Bildern MA9A und MA9B verdeutlicht werden. Die allgemeine Spannungsquelle $u_q(t)$ wird untersucht auf die Frequenzkomponenten und durch eine Summe von Spannungsquellen dargestellt, siehe Bild MA9A. Nach dem Überlagerungsprinzip sind bei einem linearem Netzwerk die Auswirkungen einer jeden Spannungsquelle einzeln zu untersuchen und danach zu addieren, siehe Bild MA9B.

Allgemein läßt sich die Berechnung auch formelmäßig beschreiben:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_{q1}, \varphi_1 &\Rightarrow \hat{u}_{q1} = \hat{u}_{q1} \angle \varphi_1 &\Rightarrow \text{komplexe Rechnung} &\Rightarrow \hat{u}_1 = \hat{u}_1 \angle \varphi_1 &\Rightarrow u_1 = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \\
 \hat{u}_{q2}, \varphi_2 &\Rightarrow \hat{u}_{q2} = \hat{u}_{q2} \angle \varphi_2 &\Rightarrow \text{komplexe Rechnung} &\Rightarrow \hat{u}_2 = \hat{u}_2 \angle \varphi_2 &\Rightarrow u_2 = \hat{u}_2 \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2) \\
 \hat{u}_{q3}, \varphi_3 &\Rightarrow \hat{u}_{q3} = \hat{u}_{q3} \angle \varphi_3 &\Rightarrow \text{komplexe Rechnung} &\Rightarrow \hat{u}_3 = \hat{u}_3 \angle \varphi_3 &\Rightarrow u_3 = \hat{u}_3 \cdot \cos(3\omega t + \varphi_3) \\
 &\dots &&&& \\
 &\dots &&&& \\
 \hat{u}_{qn}, \varphi_n &\Rightarrow \hat{u}_{qn} = \hat{u}_{qn} \angle \varphi_n &\Rightarrow \text{komplexe Rechnung} &\Rightarrow \hat{u}_n = \hat{u}_n \angle \varphi_n &\Rightarrow u_n = \hat{u}_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n)
 \end{aligned}$$

$$u_z(t) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

Aus den Amplituden und Phasenwinkeln der einzelnen Quellspannungen werden die einzelnen Amplituden und Phasenwinkel der zu untersuchenden Größe (im oberen Beispiel u) berechnet. Zum Schluß werden alle Auswirkungen addiert.

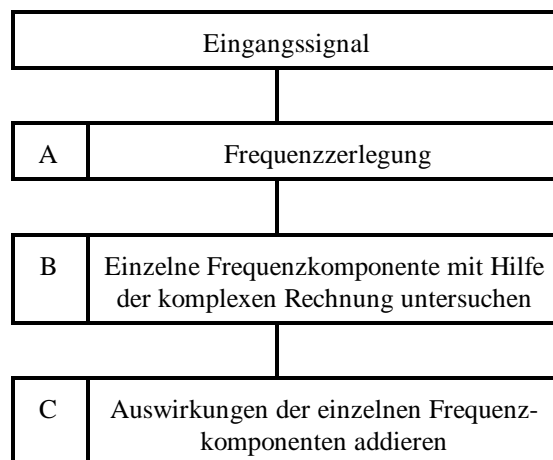


Bild MA9C

Bild MA9C verdeutlicht die Teilaufgaben. Im Rahmen der Mathematik soll hier in erster Linie nur der Punkt A - Frequenzzzerlegung - behandelt werden.

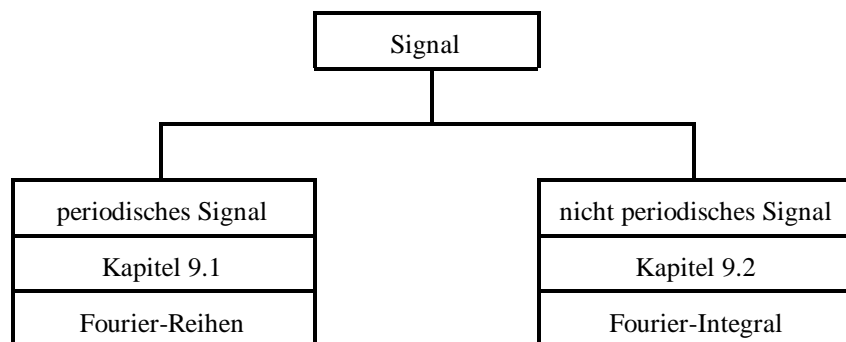


Bild MA9D: Einteilung von Signalen

Nach Bild MA9D lassen sich die Signale in Bezug ihre Periodizität einteilen. Der größte Teil der Frequenzanalyse (Kap. 9.1) beschäftigt sich mit periodischen Signalen. Periodische Größen lassen sich mit Hilfe von **Fourier-Reihen** (Kap. 9.1) beschreiben. Nicht periodische Größen (in der Regel Einmalsignale, Impulse) lassen sich mit Hilfe des **Fourier-Integrals** (Kap. 9.2) beschreiben.

Die obere Einteilung erfolgte anhand einer elektrotechnischen Problemstellung. Auch in der Mechanik können Vorgänge mit Hilfe von Fourier-Reihen und Fourier-Integral berechnet werden. Als Anregung für ein Feder-Masse-System kann man sich eine gegebene Kraft oder einen gegebenen Weg vorstellen. Ist die Anregung nicht harmonisch, (sinusförmig), wird eine Frequenzzzerlegung erforderlich.

9.1. Fourier-Reihen

9.1.1. Einleitung

9.1.1.1 Allgemeiner periodischer Verlauf in t

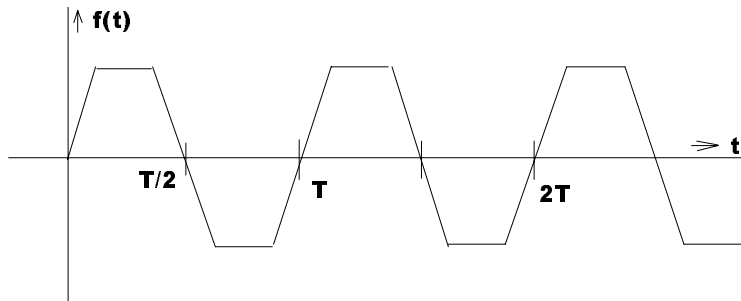


Bild MA9111A

Bild MA9111A zeigt einen periodischen Verlauf in t mit der Periodendauer T. Die Bedingung hier ist, daß sich der Zeitverlauf nach der Periodendauer T wiederholt:

$$f(t) = f(t + nT) \quad (9.1.1.1)$$

9.1.1.2. Allgemeiner periodischer Verlauf in x

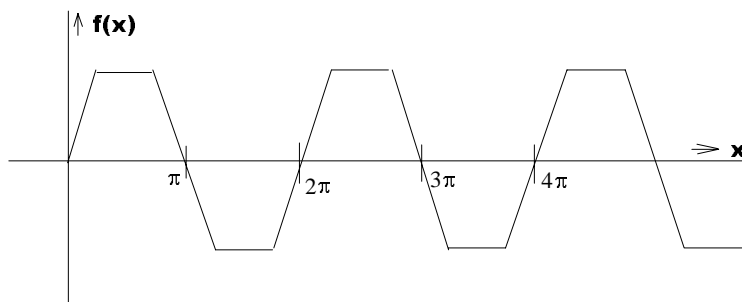


Bild MA9112A

Bild MA9112A zeigt einen periodischen Verlauf in x mit der Periodendauer 2π . Die Bedingung hier lautet:

$$f(x) = f(x + n \cdot 2\pi) \quad (9.1.1.2)$$

wird in Gleichung (9.1.1.1) t ersetzt durch ωt (bzw. T durch ωT) ergibt sich:

$$f(\omega t) = f(\omega t + n \cdot \omega T) \quad (9.1.1.3)$$

Durch einen Vergleich von (9.1.1.2) und (9.1.1.3) läßt sich ablesen und umformen:

$$x = \omega t \quad (9.1.1.4)$$

$$n \cdot 2\pi = n \cdot \omega T$$

$$\omega = 2\pi/T \quad (9.1.1.5)$$

Die Frequenz ergibt sich als Inverse der Periodendauer:

$$f = \frac{1}{T} \quad (9.1.1.6)$$

Somit läßt sich die Kreisfrequenz in (9.1.1.6) auch angeben als:

$$\omega = 2\pi f \quad (9.1.1.7)$$

9.1.1.3. Mathematische Beschreibung periodischer Verläufe

Das Problem, daß eine Funktion $f(x)$ durch eine Ersatzfunktion $g(x)$ angenähert wurde, ist sind aus Kap. 8.5 (Potenzreihenentwicklung) bekannt. Hier war die Vorgabe: Die Ersatzfunktion soll die ursprüngliche Funktion in der Nähe der Entwicklungsstelle recht gut wiedergeben. Die Bedingungen dabei waren: Die Ableitungen beider Funktionen sollten an der Entwicklungsstelle übereinstimmen. Hier (bei periodischen Funktionen) ist nun eine andere Aufgabe vorhanden: Die Funktion aus Bild MA9112A soll als Reihe im gesamten Bereich möglichst gut angenähert werden.

Im Vorgriff auf die tatsächliche Lösung soll die folgende Funktion untersucht werden:

$$\begin{aligned}
 y = & \sin(x) & + \frac{2}{9} \sin(3x) & + \frac{1}{25} \sin(5x) \\
 & - \frac{1}{49} \sin(7x) & - \frac{2}{81} \sin(9x) & - \frac{1}{121} \sin(11x) \\
 & + \frac{1}{169} \sin(13x) & + \frac{2}{225} \sin(15x) & + \frac{1}{289} \sin(17x) \\
 & - \frac{1}{361} \sin(19x) & - \frac{2}{441} \sin(21x) & - \frac{1}{529} \sin(23x) + \dots
 \end{aligned}$$

oder als abgebrochene Reihe:

$$y_n = \sum_{k=1,3,5,7,\dots}^n b_k \sin(kx)$$

Wie mit zunehmenden Reihengliedern, die angenäherte Funktion deutlich sichtbar wird, zeigt Bild MA9113A auf Arbeitsblatt MAIII-1. Die periodische Trapezform wird mit größerer Anzahl der Reihengliedern sichtbar. Mit $n = 11$ und $n = 17$ wird die Trapezform schon recht gut wiedergegeben.

Aus dieser Einleitung ist erkennbar, daß die Summe von periodischen Funktionen wieder periodische Funktion ergibt. Diese Summen von periodischen Funktionen werden allgemein als Fourier-Reihen bezeichnet.

Arbeitsblatt MAIII-1

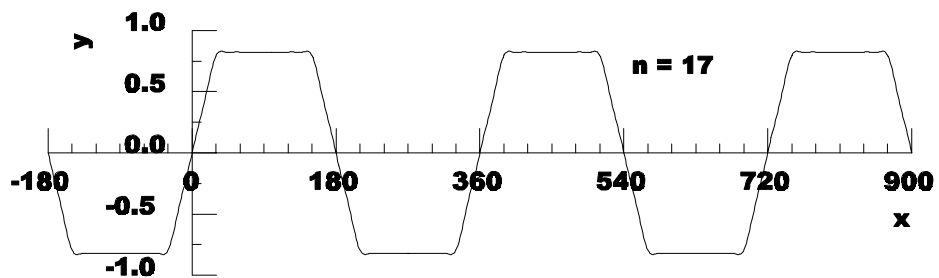
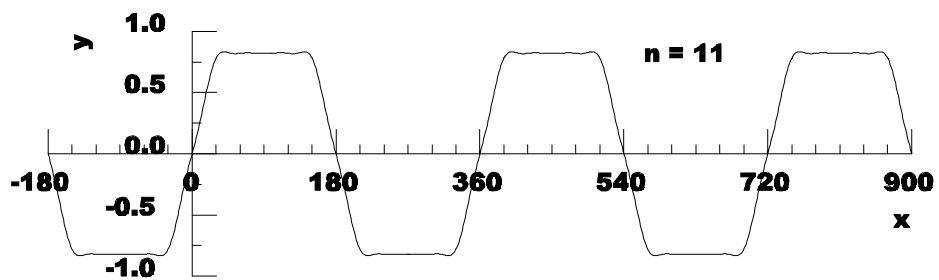
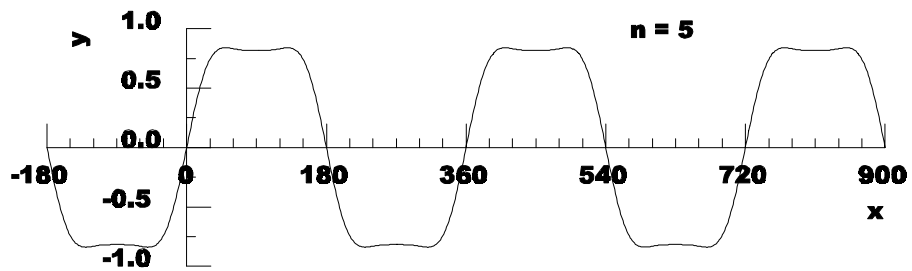
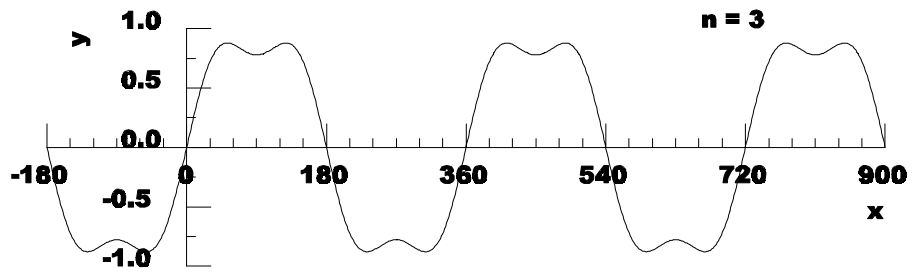


Bild MA9113A

$$\begin{aligned}
 y = & \sin(x) & + \frac{2}{9} \sin(3x) & + \frac{1}{25} \sin(5x) \\
 & - \frac{1}{49} \sin(7x) & - \frac{2}{81} \sin(9x) & - \frac{1}{121} \sin(11x) \\
 & + \frac{1}{169} \sin(13x) & + \frac{2}{225} \sin(15x) & + \frac{1}{289} \sin(17x) \\
 & - \frac{1}{361} \sin(19x) & - \frac{2}{441} \sin(21x) & - \frac{1}{529} \sin(23x) + \dots
 \end{aligned}$$

9.1.2. Allgemeine Form der Fourier-Reihe

Wie sieht die allgemeine Form der Fourier-Reihe aus? Die allgemeine Form einer harmonischen Größe ist die Addition einer Sinus- und einer Kosinus-Funktion mit beliebigen Amplituden. Ein beliebiger periodischer Verlauf ist nun die Addition von beliebigen Harmonischen. Eine jede harmonische Funktion hat den Gleichanteil Null. Damit ein periodischer Verlauf mit Gleichanteil beschreibbar ist, muß ein konstanter Anteil addiert werden. Aus dem vorher Erwähnten folgt der Ansatz für die reelle Fourier-Reihe:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \quad (9.1)$$

Der konstante Anteil mit $a_0/2$ erscheint im Moment nicht erklärbar (Ableitung später). Die a_k , b_k und a_0 werden Fourierkoeffizienten genannt. Falls nun ein analytischer Funktionsverlauf gegeben ist, besteht das Problem a_k , b_k und a_0 zu berechnen (siehe Kap. 9.1.4). Auch bei gegebenen Meßwerten ist die Bestimmung der a_k , b_k und a_0 möglich (siehe Kap. 9.1.8). $a_0/2$ wurde im oberen Ansatz gewählt, weil sich dann die a_k ($k = 0 \dots \infty$) allgemein berechnen lassen (Ableitung später).

Der obere Ansatz erfolgte für eine Funktion $y = f(x)$ mit der Periode 2π . Meistens sind periodische Funktionen zeitabhängig mit der Periode T und der Kreisfrequenz ω_0 .

Wird x in (9.1) ersetzt durch:

$$x = \omega_0 t \quad (9.2)$$

ergibt sich die allgemeine Fourier-Reihe als Funktion der Zeit t :

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \quad (9.3)$$

mit der Periode

$$\omega_0 * T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (9.4)$$

Wiederholung und Ergänzung: Begriffe zu periodischen Funktionen.

Kosinus-Funktion: Funktion nur einer Frequenz mit dem Maximum bei $x = 0$ oder $t = 0$.

Sinus-Funktion: Funktion nur einer Frequenz mit dem Maximum bei $x = \pi/2 = 90^\circ = \omega_0 * T/4$.

Harmonische Funktion: Funktion nur einer Frequenz mit beliebiger Amplitude und beliebiger Phase. Diese läßt sich aus der Addition einer Kosinus- und einer Sinus-Funktion bilden.

Periodendauer: Die kürzeste Differenz der unabhängigen Variablen (x oder t) nach der sich der periodische Vorgang wiederholt.

Gleichanteil: Arithmetischer Mittelwert, wird durch $a_0/2$ repräsentiert.

Grundschiwingung: Ist die harmonische Schwiwingung mit der Grundfrequenz. Die Grundfrequenz ist die Frequenz mit der Periodendauer (s.o.). In der Summenformel hat die Grundschiwingung den Index ($k = 1$).

Oberschiwingungen: Alles was nicht Gleichanteil oder Grundschiwingung ist, wir als Oberschiwingungsanteil bezeichnet. Die Frequenzen der Oberschiwingungen sind ganzzahlige vielfache der Frequenz der Grundschiwingung. In der Summenformel repräsentieren die Oberschiwingungen die Indizes mit $k > 1$.

Grund- und Oberwellen: Die Ausdrücke werden häufig irrtümlich für Schwiwingungen benutzt. Die Abhängigkeit $y = f(x)$ oder $y = f(t)$ ist keine Welle. Eine Welle ist eine zeit- und ortsabhängige Größe. Wellen sollen in diesem Kapitel nicht behandelt werden.

9.1.3. Berechnung von Integralen

Bevor in Abschnitt 9.1.4 die Bestimmung der Koeffizienten a_k , b_k und a_0 vorgenommen wird, sollen die dafür notwendigen Integrale in diesem Abschnitt bestimmt werden.

Berechnung 1. Integral

$$I_1 = \int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) dx = \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_{x=0}^{2\pi} = \frac{1}{k} [\sin(k2\pi) - \sin(0)] = 0 - 0$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) dx = 0 \quad k \geq 1$$

Berechnung 2. Integral

$$I_2 = \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_{x=0}^{2\pi} = \frac{1}{k} [\cos(k2\pi) - \cos(0)] = \frac{1}{k} [1 - 1]$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) dx = 0 \quad k \geq 1$$

Das Ergebnis des 1. und 2. Integral sagt aus: Das Integral einer reinen Wechselgröße über eine oder mehrere vollständige Perioden ist Null.

Berechnung 3. Integral

$$I_3 = \int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) * \cos(mx) dx = ?$$

Umformung:

$$\text{Tabelle: } \cos(kx) * \cos(mx) = \frac{1}{2} \{ \cos[(k - m)x] + \cos[(k + m)x] \}$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2\pi} \{ \cos[(k - m)x] + \cos[(k + m)x] \} dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[(k - m)x]}{k - m} + \frac{\sin[(k + m)x]}{k + m} \right\}_{x=0}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[(k - m)2\pi] - \sin(0)}{k - m} + \frac{\sin[(k + m)2\pi] - \sin(0)}{k + m} \right\} = 0 \quad k \neq m$$

k = m

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos^2(kx) dx = \int_{x=0}^{2\pi} \frac{1}{2} [1 + \cos(2kx)] dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2\pi} dx = \frac{1}{2} * 2\pi = \pi$$

Zusammenfassung der Berechnung des 3. Integrals

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) * \cos(mx) dx = 0 \quad k \neq m$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) * \cos(mx) dx = \pi \quad k = m$$

Berechnung 4. Integral

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2\pi} \{ \sin[(k + m)x] + \sin[(k - m)x] \} dx$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \cos(mx) dx = 0$$

Kommentar: Der Integrand wird umgeformt in zwei Sinusschwingungen verschiedener Frequenz mit der Periode 2π dividiert durch eine ganze Zahl. Das Integral wird immer zu Null, weil über eine ganze Periode integriert wird. Auch für $k = m$ wird das Integral hier zu Null, weil der zweite Term im Integranden Null wird.

Berechnung 5. Integral

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \sin(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2\pi} \{ \cos[(k-m)x] - \cos[(k+m)x] \} dx$$

Die Umformung ergibt fast den gleichen Ausdruck als das Integral aus der Multiplikation zweier Kosinus-Funktionen (Berechnung 3. Integral). Nur das Vorzeichen des zweiten Ausdrucks ist verschieden. Dieser ergibt Null. Das Integral der Multiplikation zweier Sinus-Funktionen ergibt das gleiche Ergebnis als das zweier Kosinus-Funktionen:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \sin(mx) dx = 0 \quad k \neq m$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \sin(mx) dx = \pi \quad k = m$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

Ergebnis 1. Integral

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) dx = 0 \quad k \geq 1 \quad (9.1.3.1)$$

Ergebnis 2. Integral

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) dx = 0 \quad k \geq 1 \quad (9.1.3.2)$$

Ergebnis 3. Integral

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) * \cos(mx) dx = 0 \quad 0 \quad k \neq m \quad (9.1.3.3)$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) * \cos(mx) dx = \pi \quad k = m \quad (9.1.3.4)$$

Ergebnis 4. Integral

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \cos(mx) dx = 0 \quad (9.1.3.5)$$

Ergebnis 5. Integral

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \sin(mx) dx = 0 \quad k \neq m \quad (9.1.3.6)$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \sin(mx) dx = \pi \quad k = m \quad (9.1.3.7)$$

9.1.4. Bestimmung der Fourier-Koeffizienten

9.1.4.1. a_0 - Bestimmung

Zur a_0 - Berechnung wird die Fourier-Reihe (9.1) integriert in den Grenzen von $x = 0$ bis 2π .

$$\int_{x=0}^{2\pi} y(x) dx = \int_{x=0}^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \right] dx$$

Vertauschen von Integration und Summation ergibt:

$$\int_{x=0}^{2\pi} y(x) dx = \int_{x=0}^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) dx$$

aus den Gleichungen (9.1.3.1) und (9.1.3.2) ist bekannt:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) dx = 0$$

Damit ergibt das obere Integral über $y(x)$:

$$\int_{x=0}^{2\pi} y(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{x=0}^{2\pi} dx = \frac{a_0}{2} \cdot x \Big|_{x=0}^{2\pi} = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi$$

Es soll integriert werden über die Periode 2π . Ob bei $x = 0$ begonnen wird oder $x = x_1$, ist egal. Wird außerdem "m" durch "k" ersetzt, erhält man:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) dx \quad (9.5)$$

a_0 - Bestimmung mit Hilfe des Mittelwertes:

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) dx \right] = \frac{1}{2} a_0$$

$$a_0 = 2\bar{y} \quad (9.5.A)$$

9.1.4.2. a_m - Bestimmung

Der Index "m" soll betrachtet werden. Dazu wird die Funktion $y(x)$ mit $\cos(mx)$ multipliziert und wiederum über 2π integriert:

$$\int_{x=0}^{2\pi} y(x) * \cos(mx) dx = \int_{x=0}^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k * \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k * \sin(kx) \right] * \cos(mx) dx$$

Ausmultiplizieren und Vertauschen von Integration und Summation ergibt:

$$\int_{x=0}^{2\pi} y(x) * \cos(mx) dx = \frac{a_0}{2} \int_{x=0}^{2\pi} \cos(mx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) * \cos(mx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \cos(mx) dx \quad (9.1.4.2.1)$$

Aus Kap. 9.1.3 ist bekannt:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) dx = 0 \quad k \geq 1 \quad (9.1.3.1)$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \cos(mx) dx = 0 \quad (9.1.3.5)$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) * \cos(mx) dx = 0 \quad k \neq m \quad (9.1.3.3)$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) * \cos(mx) dx = \pi \quad k = m \quad (9.1.3.4)$$

Die vielen Summen der Integrale auf der rechten Seite der Gleich (9.1.4.2.1) liefern nur einen Beitrag. Somit ergibt sich:

$$\int_{x=0}^{2\pi} y(x) * \cos(mx) dx = a_m * \pi \quad k = m$$

Umgeformt erhält man den Koeffizient a_m der Fourier-Reihe

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{2\pi} y(x) * \cos(mx) dx$$

Es soll integriert werden über die Periode 2π . Ob bei $x = 0$ begonnen wird oder $x = x_1$, ist egal. Wird außerdem "m" durch "k" ersetzt, erhält man:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) * \cos(kx) dx \quad (9.6)$$

9.1.4.3. b_m - Bestimmung

Die b_m - Bestimmung geschieht in gleicher Weise wie die a_m - Bestimmung. Nur hier wird die Funktion $y(x)$ mit $\sin(mx)$ multipliziert und wiederum über 2π integriert.

$$\int_{x=0}^{2\pi} y(x) * \sin(mx) dx = \int_{x=0}^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k * \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k * \sin(kx) \right] * \sin(mx) dx$$

Ausmultiplizieren und Vertauschen von Integration und Summation ergibt:

$$\int_{x=0}^{2\pi} y(x) * \sin(mx) dx = \frac{a_0}{2} \int_{x=0}^{2\pi} \sin(mx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{x=0}^{2\pi} \cos(kx) * \sin(mx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \sin(mx) dx \quad (9.1.4.3.1)$$

Aus Kap. 9.1.3 ist bekannt:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \cos(mx) dx = 0 \quad (9.1.3.5)$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \sin(mx) dx = 0 \quad k \neq m \quad (9.1.3.6)$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) * \sin(mx) dx = \pi \quad k = m \quad (9.1.3.7)$$

Die vielen Summen der Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (9.1.4.3.1) liefern nur einen Beitrag. Somit ergibt sich:

$$\int_{x=0}^{2\pi} y(x) * \sin(mx) dx = b_m * \pi \quad k = m$$

Umgeformt ergibt sich der Koeffizient b_m der Fourier-Reihe

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{2\pi} y(x) * \sin(mx) dx$$

Es soll integriert werden über die Periode 2π . Ob bei $x = 0$ begonnen wird oder $x = x_1$, ist egal. Wird außerdem "m" durch "k" ersetzt, erhält man:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) * \sin(kx) dx \quad (9.7)$$

9.1.4.4. Zusammenfassung

Die in 2π periodische Funktion $y(x)$ soll mit Hilfe der Reihe

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(kx) \quad (9.1)$$

angepaßt werden. Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich mit Hilfe der folgenden Formeln bestimmen:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_1+2\pi} y(x) dx \quad (9.5)$$

$$a_0 = 2\bar{y} \quad (9.5.A)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_1+2\pi} y(x) \cdot \cos(kx) dx \quad (9.6)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_1+2\pi} y(x) \cdot \sin(kx) dx \quad (9.7)$$

9.1.4.5. Fourier-Reihe $f(t)$

Bislang wurden periodische Vorgänge in x mit der Periode 2π behandelt. Für die theoretische Betrachtung reicht dieses aus. Für zeitabhängige Größen in t wird x substituiert durch $\omega_0 t$.

$$x = \omega_0 t \quad (9.2)$$

$$\omega_0 = 2\pi/T \quad T \text{ - Periodendauer der Grundschiwingung}$$

$$dx = d(\omega_0 t) = (2\pi/T) \cdot dt \quad (9.1.4.5.1)$$

Somit ergibt sich die Fourier-Reihe in t :

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \quad (9.3)$$

mit

$$\omega_0 * T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (9.4)$$

Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich durch Substitution von x mit Hilfe von (9.2) und (9.1.4.5.1) in (9.5) bis (9.7)

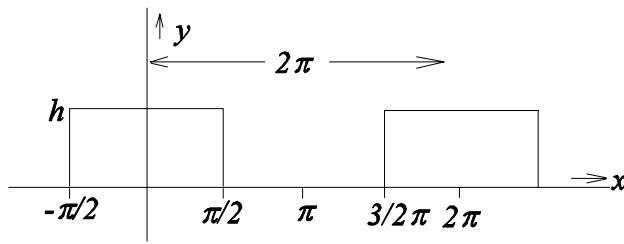
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t=t_1}^{t_1+T} y(t) dt \quad (9.8)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t=t_1}^{t_1+T} y(t) * \cos(k\omega_0 t) dt \quad (9.9)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t=t_1}^{t_1+T} y(t) * \sin(k\omega_0 t) dt \quad (9.10)$$

9.1.5. Beispiele

In diesem Abschnitt sollen drei Beispiele berechnet werden (Kap. 9.1.5.1). Im Abschnitt 9.1.5.2 werden Berechnungsergebnissen vorgestellt mit anschließender Diskussion in Kapitel 9.1.6.

9.1.5.1. Übungsaufgaben**Beispiel 1:** (Rechteckfunktion)**gegeben:** $y(x) = h$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

 $y(x) = 0$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$$

Bild MA9151A

 a_0 - Bestimmung:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_1+2\pi} y(x) dx \quad (9.5)$$

Hier wird zweckmäßigerweise von $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ bis $x_2 = +\frac{\pi}{2}$ integriert:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} h dx = \frac{h}{\pi} \left[x \right]_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{h}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = h$$

 a_k - Bestimmung:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_1+2\pi} y(x) \cos(kx) dx \quad (9.6)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} h * \cos(kx) dx = \frac{h}{\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{h}{\pi * k} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} * k\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} * k\right) \right] = \frac{2 * h}{\pi * k} \sin\left(\frac{\pi}{2} * k\right)$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sin(k * \pi/2)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0

 b_k - Bestimmung:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_1+2\pi} y(x) \sin(kx) dx \quad (9.7)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} h * \sin(kx) dx = -\frac{h}{\pi} \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} = -\frac{h}{\pi * k} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} * k\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} * k\right) \right] = 0$$

Ergebnis:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k * \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k * \sin(kx) \quad (9.1)$$

$$y(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left[1 * \cos(x) - \frac{1}{3} * \cos(3x) + \frac{1}{5} * \cos(5x) - \frac{1}{7} * \cos(7x) + \dots \right]$$

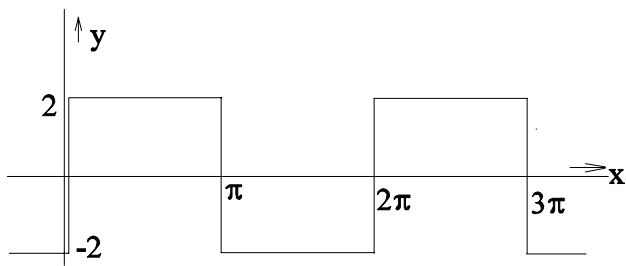
Beispiel 2: (Studenten)

Bild MA9151B

gegeben: obere Funktion**gesucht:** a_0, a_k, b_k **Ergebnis:**

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{\pi} [1 - \cos(k\pi)] \frac{1}{k} = \frac{4}{\pi} [1 - (-1)^k] \frac{1}{k}$$

$$y(x) = \frac{8}{\pi} \left[\frac{1}{1} \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right]$$

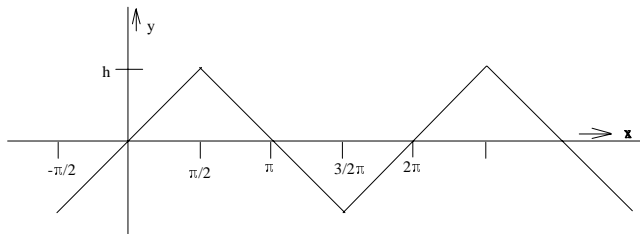
Beispiel 3: (Dreieckfunktion)

Bild MA9151B

gegeben:

$$y(x) = h \frac{2}{\pi} * x \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y(x) = -h \frac{2}{\pi} * (x - \pi) \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

a₀ - Bestimmung:

$$a_0 = 0 \quad \text{da Mittelwert Null, aus Gleichung (9.5A)}$$

a_k - Bestimmung:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_1+2\pi} y(x) \cos(kx) dx \quad (9.6)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} h \frac{2}{\pi} * x * \cos(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{x=\pi/2}^{3\pi/2} \left(-h \frac{2}{\pi} \right) (x - \pi) * \cos(kx) dx$$

$$\cos(kx) = \pm \cos(kx - k\pi) = \pm \cos[k(x - \pi)]$$

+ für gerade k
- für ungerade k

$$a_k = \frac{2h}{\pi^2} \left[\int_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} x * \cos(kx) dx \mp \int_{x=\pi/2}^{3\pi/2} (x - \pi) \cos[k(x - \pi)] d(x - \pi) \right]$$

- für gerade k
+ für ungerade k

Substitution: $u = x - \pi$

$$a_k = \frac{2h}{\pi^2} \left[\int_{x=-\pi/2}^{-\pi/2} x * \cos(kx) dx \mp \int_{u=-\pi/2}^{\pi/2} u * \cos(ku) du \right]$$

- für k gerade
+ für k ungerade

$$a_k = 0 \quad \text{für gerade k}$$

$$a_k = \frac{4h}{\pi^2} \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} x * \cos(kx) dx \quad \text{für ungerade k}$$

Tabelle: $\int x * \cos(kx) dx = \frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x * \sin(kx)}{k}$

$$a_k = \frac{4h}{\pi^2} \left[\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x * \sin(kx)}{k} \right]_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} \quad \text{für ungerade k}$$

$$a_k = 0 \quad \text{auch für ungerade k}$$

b_k - Bestimmung:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x_1 - \pi/2}^{x_1 + \pi/2} y(x) * \sin(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} h \frac{2}{\pi} * x * \sin(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3/2\pi} \left(-h \frac{2}{\pi} \right) (x - \pi) * \sin(kx) dx$$

$$\text{Tabelle: } \sin(kx) = \pm \sin(kx - k\pi) = \pm \sin[k(x - \pi)]$$

+ für k gerade
- für k ungerade

$$b_k = \frac{2h}{\pi^2} \left[\int_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} x * \sin(kx) dx \mp \int_{x=\pi/2}^{3/2\pi} (x - \pi) \sin[k(x - \pi)] d(x - \pi) \right]$$

- für k gerade
+ für k ungerade

$$b_k = \frac{2h}{\pi^2} \left[\int_{x=-\pi/2}^{-\pi/2} x * \sin(kx) dx \mp \int_{u=-\pi/2}^{\pi/2} u * \sin(ku) du \right]$$

- für k gerade
+ für k ungerade

$$b_k = 0$$

für k gerade

$$b_k = \frac{4h}{\pi^2} \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} x * \sin(kx) dx$$

für k ungerade

$$\text{Tabelle: } \int x * \sin(kx) dx = \frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x * \cos(kx)}{k}$$

$$b_k = \frac{4h}{\pi^2} \left[\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x * \cos(kx)}{k} \right]_{x=-\pi/2}^{+\pi/2}$$

für k ungerade

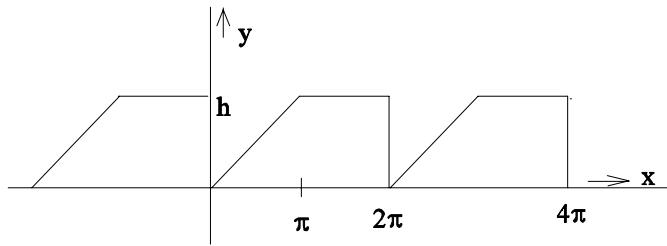
$$b_k = \frac{8h}{\pi^2 * k^2} \sin\left(k * \frac{\pi}{2}\right)$$

für k ungerade

Tabelle für $\sin(k * \pi/2)$ siehe Beispiel 1

Ergebnis:

$$y(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left[\sin(x) - \frac{1}{3^2} * \sin(3x) + \frac{1}{5^2} * \sin(5x) - \frac{1}{7^2} * \sin(7x) + \dots \right]$$

Beispiel 4:

gegeben:

$$y(x) = \frac{h}{\pi} * x \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$y(x) = h \quad \pi \leq x \leq 2\pi$$

Bild MA9151C

a₀ - Bestimmung:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{x=0}^{\pi} \frac{h}{\pi} * x * dx + \int_{x=\pi}^{2\pi} h * dx \right]$$

$$a_0 = \frac{h}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{\pi} + x \Big|_{x=\pi}^{2\pi} \right] = \frac{h}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \pi^2 + \pi \right] = \frac{h}{\pi} \left[\frac{1}{2} \pi + \pi \right] = \frac{3}{2} h$$

alternativ: $\bar{y} = \frac{3}{4} h \quad a_0 = 2 \bar{y} = \frac{3}{2} h$

a_k - Bestimmung:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_1+2\pi} y(x) \cos(kx) dx \quad (9.6)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{x=0}^{\pi} \frac{h}{\pi} * x * \cos(kx) dx + \int_{x=\pi}^{2\pi} h * \cos(kx) dx \right]$$

Tabelle: $\int x * \cos(kx) dx = \frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x * \sin(kx)}{k}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{h}{\pi} \left(\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x * \sin(kx)}{k} \right) \Big|_{x=0}^{\pi} + \frac{h}{k} \sin(kx) \Big|_{x=\pi}^{2\pi} \right]$$

$$\sin(k\pi) = 0$$

$$\cos(k\pi) = -1$$

$$\cos(k\pi) = 1$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

k ungerade

k gerade

allgemein

$$a_k = \frac{h}{\pi^2 * k^2} [(-1)^k - 1]$$

$$a_k = \frac{-2h}{\pi^2 * k^2} \quad \text{k ungerade}$$

$$a_k = 0 \quad \text{k gerade}$$

b_k - Bestimmung:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) \cdot \sin(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{x=0}^{\pi} \frac{h}{\pi} \cdot x \cdot \sin(kx) dx + \int_{x=\pi}^{2\pi} h \cdot \sin(kx) dx \right]$$

$$\text{Tabelle: } \int x \cdot \sin(kx) dx = \frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x \cdot \cos(kx)}{k}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{h}{\pi} \left(\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x \cdot \cos(kx)}{k} \right) \Bigg|_{x=0}^{\pi} - \frac{1}{k} \cos(kx) \Bigg|_{x=\pi}^{2\pi} \right]$$

$$b_k = \frac{h}{\pi} \left[-\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi \cdot \cos(k\pi)}{k} \right) - \frac{1}{k} \{ \cos(2\pi \cdot k) - \cos(\pi \cdot k) \} \right] = \frac{h}{\pi} \left[-\frac{\cos(k\pi)}{k} - \frac{\cos(2\pi k)}{k} + \frac{\cos(k\pi)}{k} \right]$$

$$\cos(2\pi k) = 1$$

$$\sin(k\pi) = 0$$

$$b_k = \frac{-h}{\pi \cdot k}$$

Ergebnis:

$$y(x) = \frac{3}{4}h - \frac{2h}{\pi^2} \left[\cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right]$$

$$- \frac{h}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right]$$

9.1.5.2. Ergebnisse von Fourier-Reihen

Hier sollen die Ergebnisse von Fourier-Reihen betrachtet werden. Die dargestellten Fourier Reihen lassen sich einordnen in die Kategorien:

- A. nur ungerade Sinus-Schwingungen
- B. nur ungerade Kosinus-Schwingungen
- C. nur gerade und ungerade Sinus-Schwingungen
- D. nur gerade und ungerade Kosinus-Schwingungen
- E. nur gerade Kosinus-Schwingungen
- F. Sinus und Kosinus-Schwingungen gemischt.

Die Berechnungsergebnisse von einigen Fourier-Reihen werden auf den nächsten Seiten dargestellt. Im Kap. 9.1.6 sollen die Eigenschaften anhand der Bilder aus diesem Abschnitt 9.1.5.2 diskutiert werden.

Anmerkung die x-Achse ist in Grad skaliert und nicht im Bogenmaß.

Eine gute Übung ist, die Koeffizienten der im folgenden gegebenen Funktionen zu berechnen.

Arbeitsblatt MAIII-2

A. Fourier-Reihen mit nur ungeraden Sinusschwingungen

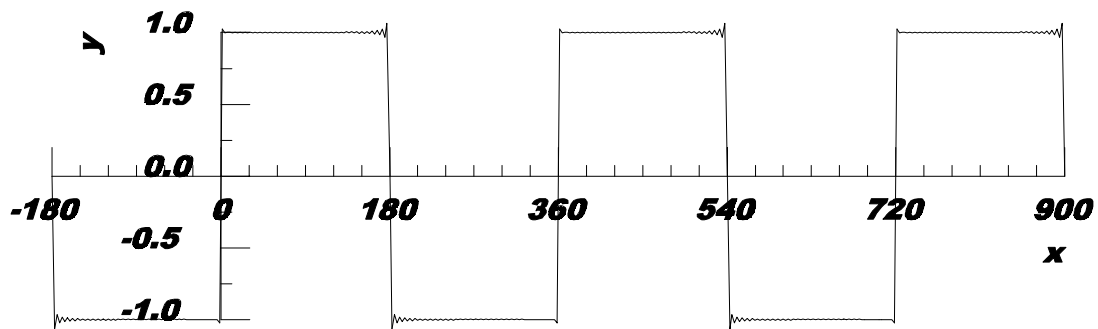


Bild MA_RE_S: Rechteck-Funktion

$$y(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{1} \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right]$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} [1 - \cos(k\pi)] \cdot \frac{1}{k}$$

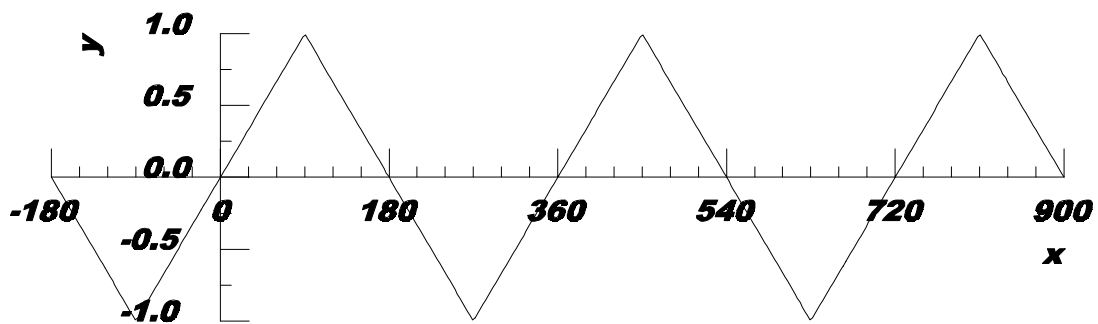


Bild MA_DR_S: Dreieck-Funktion

$$y(x) = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \sin(x) - \frac{1}{3^2} \sin(3x) + \frac{1}{5^2} \sin(5x) - + \dots \right]$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{8}{\pi^2} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

Arbeitsblatt MAIII-3

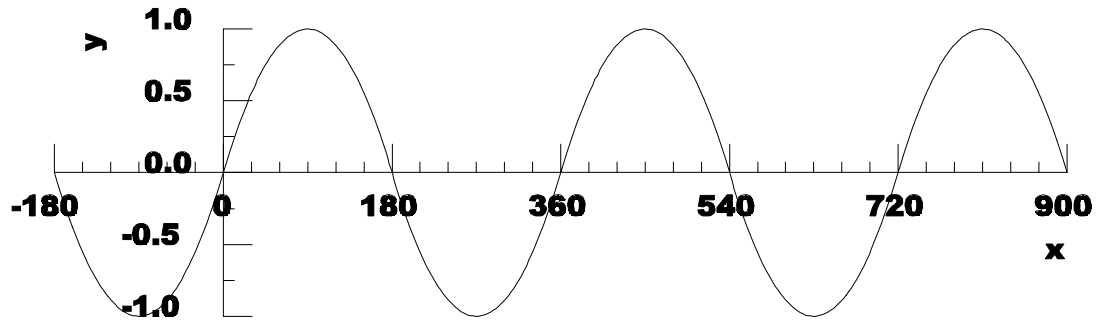


Bild MA_PA_S: Parabelbögen

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$y = -1 + \left(\frac{x - \frac{3}{2}\pi}{\pi/2} \right)^2$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$y(x) = \frac{32}{\pi^3} \left[\frac{1}{1^3} \sin(x) + \frac{1}{3^3} \sin(3x) + \frac{1}{5^3} \sin(5x) + \dots \right]$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{16}{\pi^3} [1 - \cos(k\pi)] \cdot \frac{1}{k^3}$$

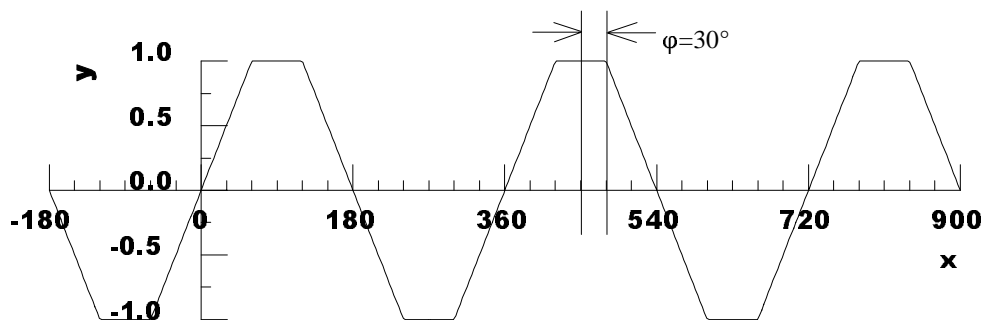


Bild TR_RE_S: Trapez-Kurve

$$y(x) = \frac{4}{\pi(\pi/2 - \varphi)} \left[\frac{\cos(\varphi)}{1^2} \sin(x) - \frac{\cos(3\varphi)}{3^2} \sin(3x) + \frac{\cos(5\varphi)}{5^2} \sin(5x) - \dots \right]$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{\pi(\pi/2 - \varphi)} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \cos(k\varphi) \cdot \frac{1}{k^2}$$

Arbeitsblatt MAIII-4

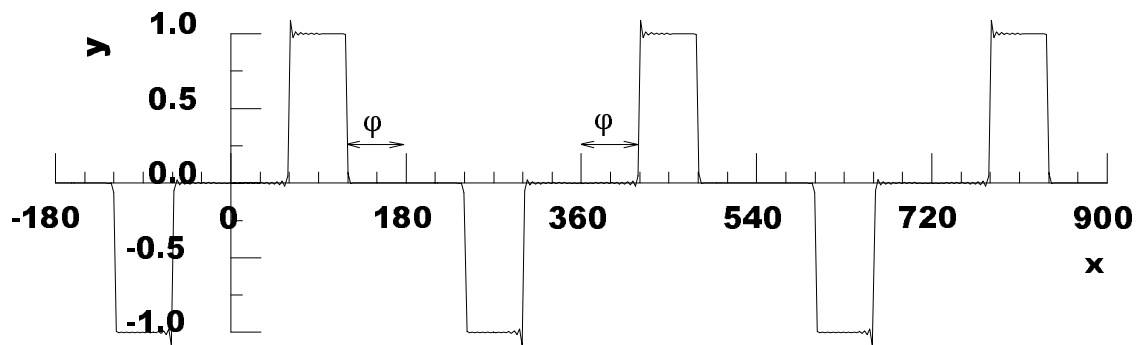


Bild RE_I_S: Rechteck-Impuls

$$y(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos(\varphi)}{1} * \sin(x) + \frac{\cos(3\varphi)}{3} * \sin(3x) + \frac{\cos(5\varphi)}{5} * \sin(5x) + \dots \right]$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \cos(k\varphi) [1 - \cos(k\pi)] * \frac{1}{k}$$

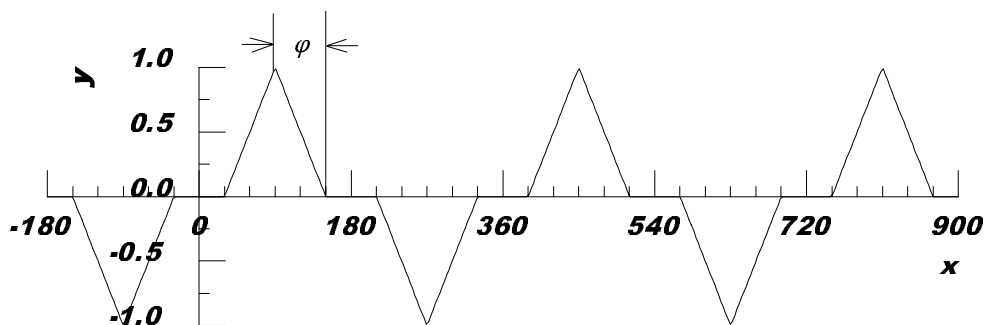


Bild DR_I_S: Dreieck-Impuls

$$y(x) = \frac{4}{\pi * \varphi} \left[\frac{1 - \cos(1\varphi)}{1^2} * \sin(x) - \frac{1 - \cos(3\varphi)}{3^2} * \sin(3x) + \frac{1 - \cos(5\varphi)}{5^2} * \sin(5x) \mp \dots \right]$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{\pi * \varphi} * \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) * [1 - \cos(k * \varphi)] * \frac{1}{k^2}$$

Arbeitsblatt MAIII-5

B. Fourier-Reihen mit nur ungeraden Kosinusschwingungen

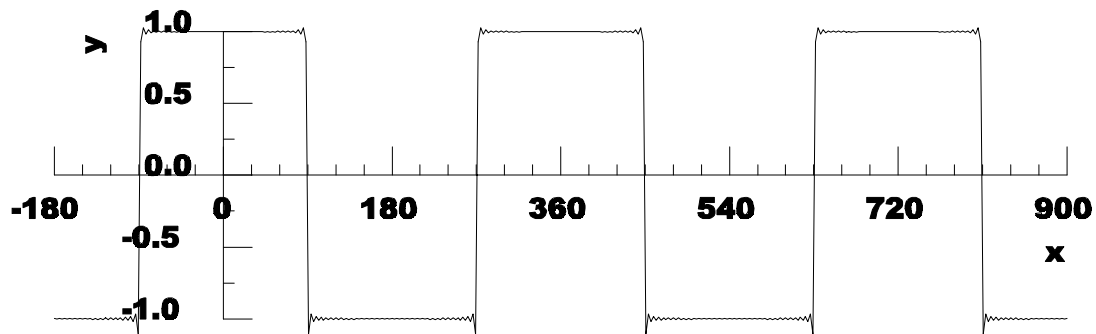


Bild MA_RE_C: Rechteck-Funktion

$$y(x) = \frac{4}{\pi} \left[\cos(x) - \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{5} \cos(5x) - \dots \right]$$

$$a_k = \frac{4}{\pi} \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{k} \quad a_0 = 0$$

$$b_k = 0$$

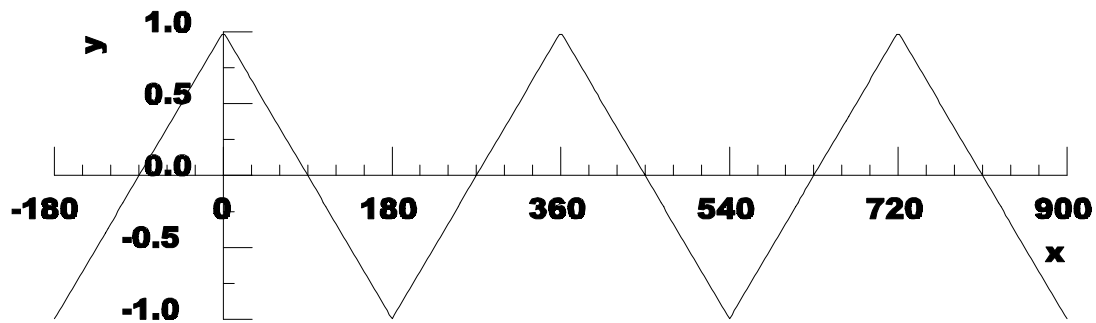


Bild MA_DR_C: Dreieck-Funktion

$$y(x) = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right]$$

$$a_k = \frac{4}{\pi^2} [1 - \cos(k\pi)] \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$b_k = 0 \quad a_0 = 0$$

Arbeitsblatt MAIII-6

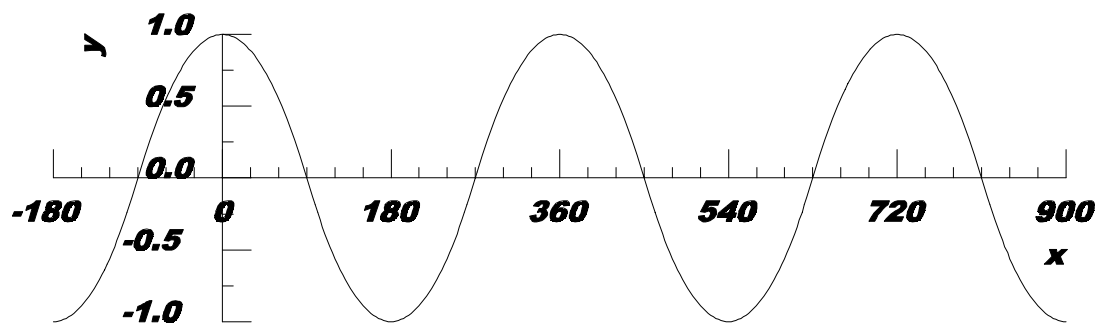


Bild MA_PA_C: Parabelbögen

$$y(x) = 1 - \left(\frac{x}{\pi/2} \right)^2 \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y(x) = 1 + \left(\frac{x - \pi}{\pi/2} \right)^2 \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$y(x) = \frac{32}{\pi^3} \left[\frac{1}{1^3} * \cos(x) - \frac{1}{3^3} * \cos(3x) + \frac{1}{5^3} * \cos(5x) - + \dots \right]$$

$$a_k = \frac{32}{\pi^3} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) * \frac{1}{k^3} \quad a_0 = 0$$

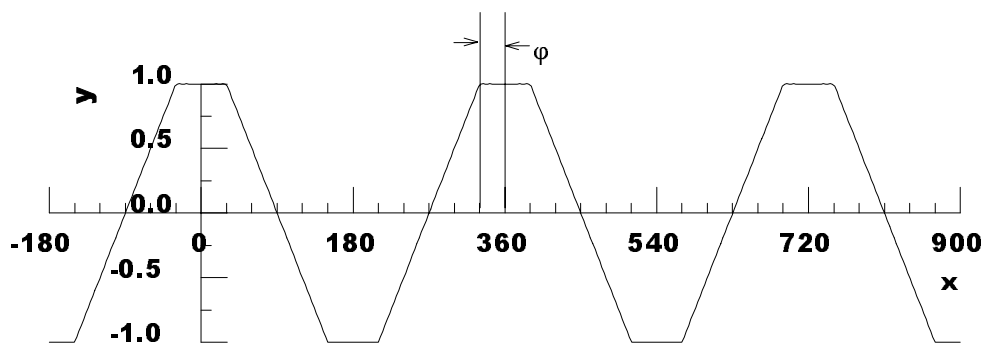


Bild TR_RE_C: Trapez-Kurve

$$y(x) = \frac{4}{\pi(\pi/2 - \varphi)} \left[\frac{\cos(\varphi)}{1^2} * \cos(x) + \frac{\cos(3\varphi)}{3^2} * \cos(3x) + \frac{\cos(5\varphi)}{5^2} * \cos(5x) + \dots \right]$$

$$a_k = \frac{2}{\pi * (\pi/2 - \varphi)} * \cos(k\varphi) * [1 - \cos(k\pi)] * \frac{1}{k^2}$$

$$b_k = 0 \quad a_0 = 0$$

Arbeitsblatt MAIII-7

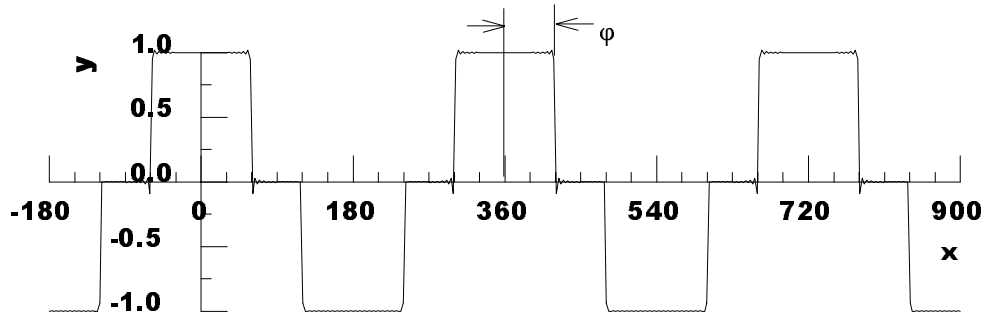


Bild RE_I_C: Rechteck-Impuls

$$y(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(\varphi)}{1} * \cos(x) + \frac{\sin(3\varphi)}{3} * \cos(3x) + \frac{\sin(5\varphi)}{5} * \cos(5x) + \dots \right]$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \sin(k\varphi) * [1 - \cos(k\pi)] * \frac{1}{k}$$

$$b_k = 0 \quad a_0 = 0$$

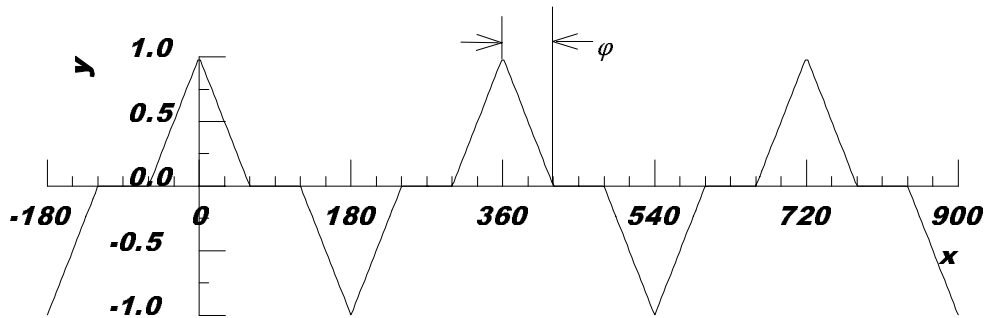


Bild DR_I_C: Dreieck-Impuls

$$y(x) = \frac{4}{\pi * \varphi} \left[\frac{1 - \cos(1\varphi)}{1^2} * \cos(x) + \frac{1 - \cos(3\varphi)}{3^2} * \cos(3x) + \frac{1 - \cos(5\varphi)}{5^2} * \cos(5x) + \dots \right]$$

$$a_k = \frac{2}{\pi * \varphi} [1 - \cos(k\pi)] * [1 - \cos(k\varphi)] * \frac{1}{k^2}$$

$$b_k = 0 \quad a_0 = 0$$

Arbeitsblatt MAIII-8

C. Fourier-Reihen mit geraden und ungeraden Sinusschwingungen

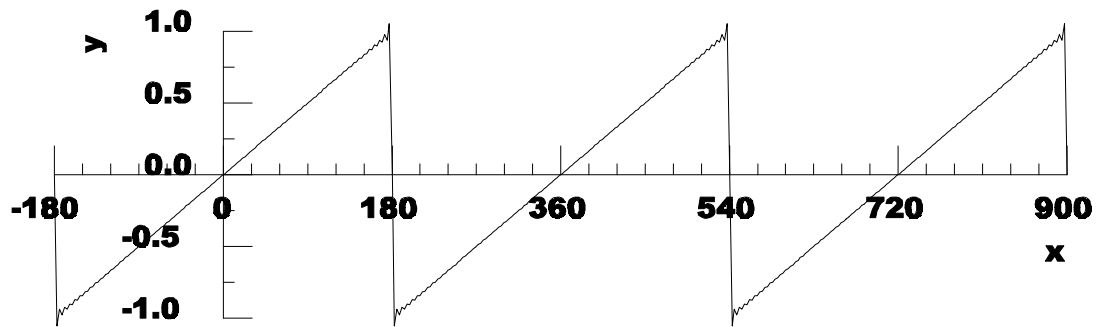


Bild MA_SZ_S1: Sägezahn 1

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \left[\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \dots \right]$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = -\frac{2}{\pi} \cos(k\pi) \cdot \frac{1}{k}$$

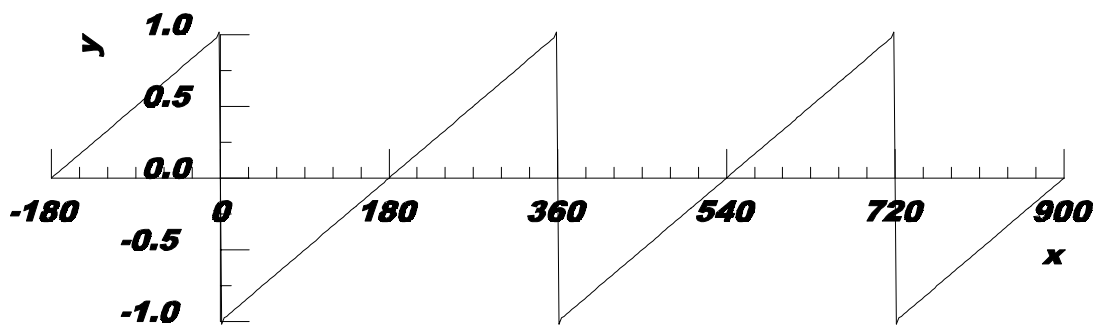


Bild MA_SZ_S2: Sägezahn 2

$$y(x) = -\frac{2}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \dots \right]$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k}$$

Arbeitsblatt MAIII-9

D. Fourier-Reihen mit geraden und ungeraden Kosinusschwingungen

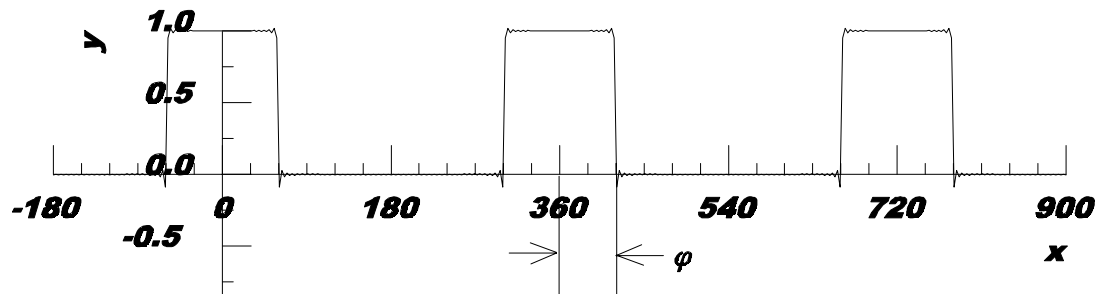


Bild RE_I_CP: Rechteck-Impuls

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(\varphi)}{1} \cdot \cos(x) + \frac{\sin(2\varphi)}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{\sin(3\varphi)}{3} \cdot \cos(3x) + \dots \right]$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \sin(k\varphi) \cdot \frac{1}{k}$$

$$b_k = 0 \quad a_0 = \frac{2\varphi}{\pi}$$

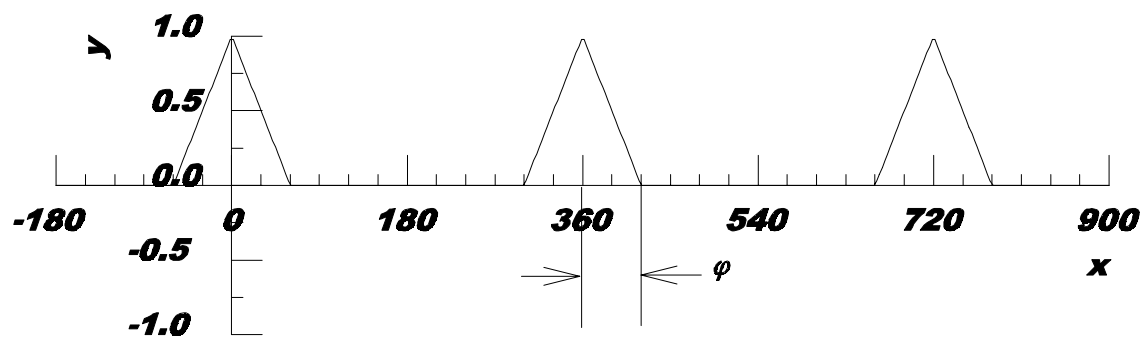


Bild DR_I_CP: Dreieck-Impuls

$$y(x) = \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{2}{\pi \cdot \varphi} \left[\frac{1 - \cos(\varphi)}{1^2} \cdot \cos(x) + \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2^2} \cdot \cos(2x) + \frac{1 - \cos(3\varphi)}{3^2} \cdot \cos(3x) + \dots \right]$$

$$a_k = \frac{2}{\pi \cdot \varphi} \frac{1 - \cos(k\varphi)}{k^2}$$

$$b_k = 0 \quad a_0 = \frac{\varphi}{\pi}$$

Arbeitsblatt MAIII-10

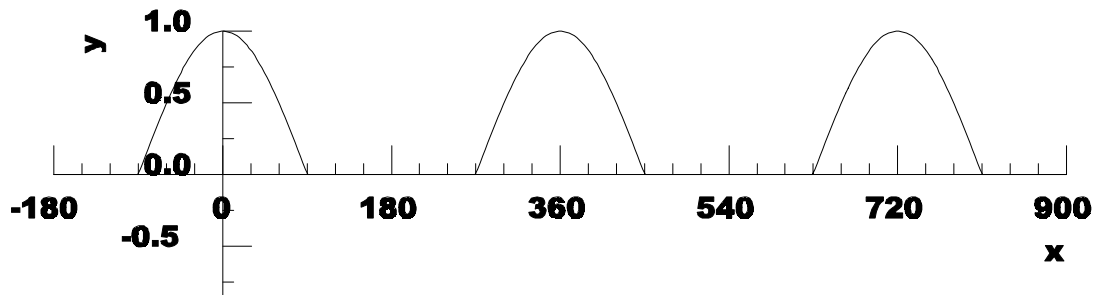


Bild EWC: Einweg-Kosinus-Gleichrichtung

$$y(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{1*3} * \cos(2x) - \frac{1}{3*5} * \cos(4x) + \frac{1}{5*7} * \cos(6x) - + \dots \right]$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_k = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{(k+1)(k-1)}$$

$$b_k = 0$$

E. Fourier-Reihen mit nur geraden Kosinusschwingungen

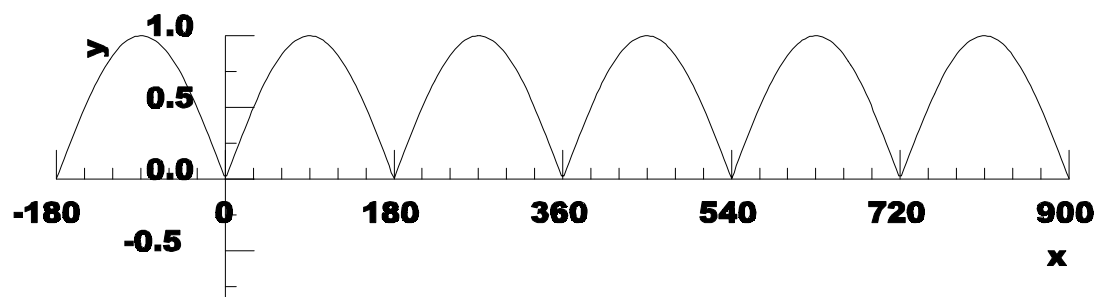


Bild ZWS: Zweiweg-Sinus-Gleichrichtung

$$y(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1*3} * \cos(2x) - \frac{1}{3*5} * \cos(4x) + \frac{1}{5*7} * \cos(6x) - + \dots \right]$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \quad a_1 = 0 \quad a_k = -\frac{4}{\pi} \frac{\cos^2\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{(k-1)(k+1)}$$

$$b_k = 0$$

Arbeitsblatt MAIII-11

F. Fourier-Reihen mit Sinus- und Kosinusschwingungen

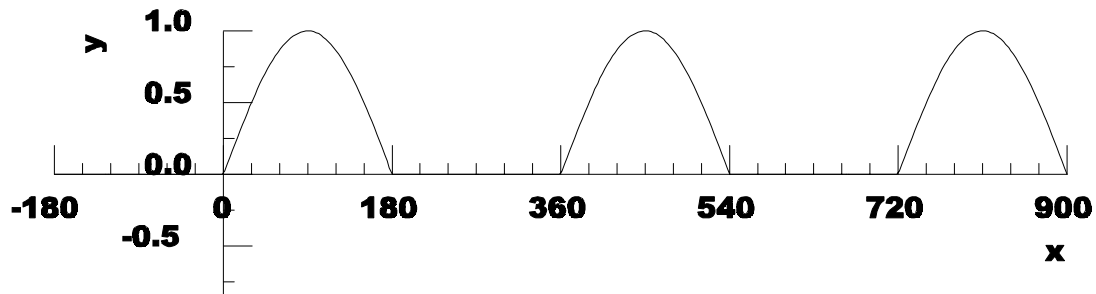


Bild EWS: Einweg-Kosinus-Gleichrichtung

$$y(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} \cos(2x) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos(4x) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos(6x) + \dots \right]$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \qquad a_k = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos^2\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{(k+1)(k-1)}$$

$$b_1 = 0.5 \qquad b_k = 0$$

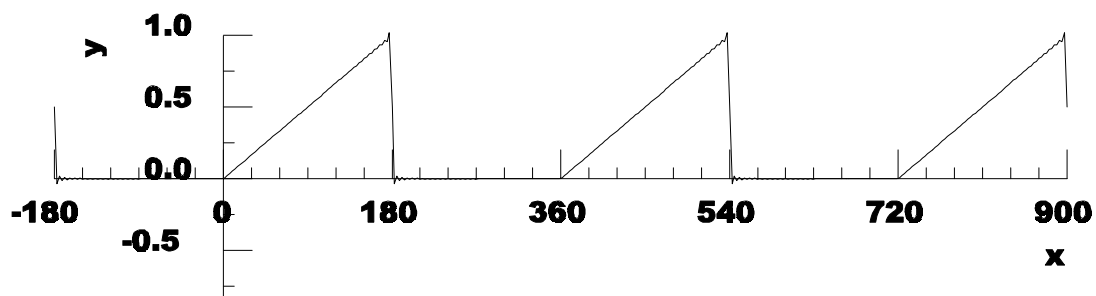


Bild SZH: halber Sägezahn

$$y(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \left[\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \dots \right] - \frac{2}{\pi^2} \left[\cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_k = -\frac{1 - \cos(k\pi)}{\pi^2 \cdot k^2}$$

$$b_k = -\frac{\cos(k\pi)}{k \cdot \pi}$$

9.1.6. Eigenschaften von Fourier-Reihen

Mit Hilfe der Bilder und der Ergebnisse der Fourier-Koeffizienten aus den vorhergehenden Kapitel 9.1.5.2 sollen in diesem Abschnitt die Eigenschaften von Fourier-Reihen diskutiert werden.:

- Punktsymmetrie
- Achsensymmetrie
- ungerade und gerade Oberschwingungen
- Wert der Fourier-Reihe an Unstetigkeitsstellen
- Konvergenz

9.1.6.1. Punktsymmetrie

Aus MA I und MA II ist bekannt, punktsymmetrische Funktionen sind ungerade Funktionen. Dieses wären z.B.:

- x
- x^3
- $\sin(x)$
- $\sinh(x)$.

Aber auch die Summen von ungeraden Funktionen sind punktsymmetrisch, wie z.B.:

- $x + x^3 + x^5$ oder
- $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots$

Fourier-Reihen mit nur Sinus-Anteilen sind punktsymmetrisch zum Nullpunkt.

Diese Aussage läßt sich in zwei Richtungen auswerten.

- Will man eine gegebene punktsymmetrische Funktion annähern, brauchen nur die Koeffizienten b_k berechnet werden ($a_k = 0$, $b_k \neq 0$).
- Hat man eine gegebene Summe von nur Sinus-Funktionen, so ist der Kurvenverlauf punktsymmetrisch zum Nullpunkt.

Die obere Aussage belegen auch die Fourier-Reihen aus dem Abschnitten A und C des vorigen Kapitels 9.1.5.2, welche alle punktsymmetrisch sind.

9.1.6.2. Achsensymmetrie

Aus MA I und MA II ist bekannt, achsensymmetrische Funktionen sind gerade Funktionen. Dieses wären z.B.:

- 1
- x^2
- x^4
- $\cos(x)$
- $\cosh(x)$.

Aber auch die Summe von geraden Funktionen sind wieder gerade Funktionen wie z.B.:

- $1 + x^2 + x^4 + \dots$ oder
- $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \dots$

Fourier-Reihen mit nur Kosinus-Anteilen sind zur y-Achse symmetrisch.

Diese Aussage läßt sich nun wiederum in zwei Richtungen auswerten.

- Ein gegebener zur y-Achse symmetrischer Verlauf hat nur Fourier-Koeffizienten mit Kosinus-Anteilen. ($b_k = 0$, $a_k \neq 0$)
- Eine gegebene Summe von nur Kosinus-Funktionen ist zur y-Achse symmetrisch.

Dieses läßt sich auch anhand der Bilder in dem Abschnitten B, D und E des letzten Abschnittes 9.1.5.2 zeigen.

9.1.6.3. Einfluß der geraden und ungeraden Oberschwingungen

Um den Einfluß von ungeraden und geraden Oberschwingungen zu untersuchen, sollen die vier Funktionen

- a1) $y(x) = \cos(x) - 1/3 \cdot \cos(3x)$
- a2) $y(x) = \cos(x) - 1/4 \cdot \cos(2x)$
- a3) $y(x) = \sin(x) - 1/3 \cdot \sin(3x)$
- a4) $y(x) = \sin(x) - 1/4 \cdot \sin(2x)$

betrachtet werden (siehe Arbeitsblatt MAIII-12). Diese vier Funktionen sind stellvertretend für die vier folgenden vier Kategorien gewählt:

- a1) Kosinus-Funktionen mit nur ungeraden Oberschwingungen.
- a2) Kosinus-Funktionen mit allen Oberschwingungen.
- a3) Sinus-Funktionen mit nur ungeraden Oberschwingungen.
- a4) Sinus-Funktionen mit allen Oberschwingungen.

Aus den Bildern a1 und a2 folgt:

- Schon bekannt: Kosinus-Reihen sind achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Kosinus-Reihen mit nur ungeraden Reihentermen sind zusätzlich punktsymmetrisch zu $(90^\circ, 0)$, was aus Arbeitsblatt MAIII-12, Bild a1 zu erkennen ist. Siehe auch Bilder B aus Kap. 9.1.5.2 (Arbeitsblatt MAIII-5- MAIII-7).

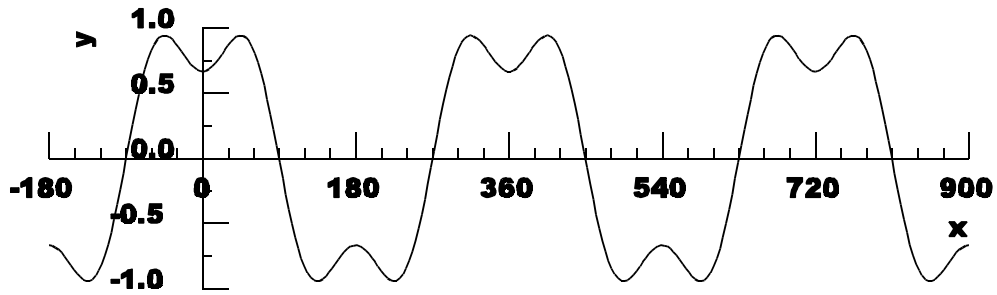
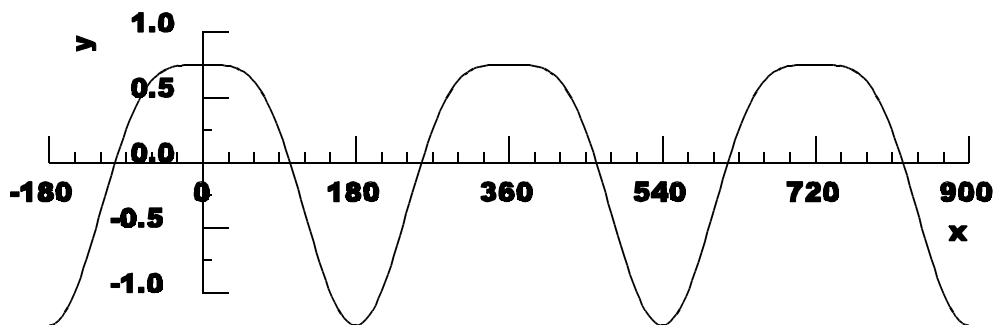
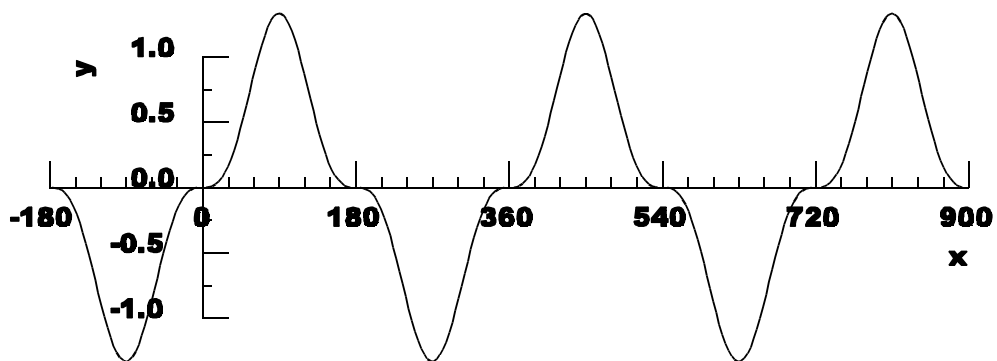
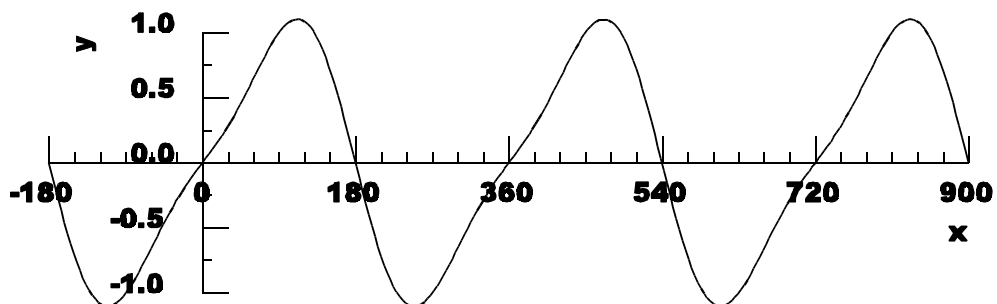
Aus den Bildern a3 und a4 folgt:

- Schon bekannt: Sinus-Reihen sind punktsymmetrisch zum Nullpunkt.
- Sinus-Reihen mit nur ungeraden Reihentermen sind zusätzlich achsensymmetrisch zu $x = 90^\circ$, was aus Arbeitsblatt MAIII-12, Bild a3 zu erkennen ist. Siehe auch Bilder A aus Kap. 9.1.5.2.

Reihen mit geraden **und** ungeraden Oberschwingungen erfüllen die zweiten Symmetriebedingungen nicht mehr. Gerade Oberschwingungsanteile wirken in Bezug auf die zweite Symmetriebedingung verzerrt. Siehe auch Bilder C und D aus Kap. 9.1.5.2.

Reihen mit nur geraden Schwingungen, wo die Grundschiwingung auch nicht vorhanden ist, brauchen hier eigentlich nicht diskutiert werden. Diese besitzen in der Periode 2π zwei gleiche Kurvenstücke der Länge π . Hier ist die Periode nicht 2π sondern π . Hier könnte substituiert werden: $x = u/2$. Siehe auch Bild E (Arbeitsblatt MAII-10, unten) aus Kap. 9.1.5.2.

Arbeitsblatt MAIII-12

Bild MA62A1: a1) $y(x) = \cos(x) - 1/3*\cos(3x)$ Bild MA62A2: a2) $y(x) = \cos(x) - 1/4*\cos(2x)$ Bild MA62A3: a3) $y(x) = \sin(x) - 1/3*\sin(3x)$ Bild MA62A4: a4) $y(x) = \sin(x) - 1/4*\sin(2x)$

9.1.6.4. Wert der Fourier-Reihe an Unstetigkeitsstellen

An Sprungstellen ist eine Funktion unstetig und nicht definiert (siehe MAI). Die mathematische Definition für Unstetigkeit lautet: der rechts- und linksseitige Grenzwerte ist an einer Unstetigkeitsstelle unterschiedlich:

$$\text{Unstetigkeit bei } x_0: \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_0 - \varepsilon)] \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_0 + \varepsilon)]$$

Für Fourier-Reihen existiert nun aber ein Wert an einer Sprungstelle und zwar ergibt sich der Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert:

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_0 - \varepsilon)] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_0 + \varepsilon)] \right]$$

Beispiel: Rechteck-Funktion von Kap. 9.1.5.2 A (Arbeitsblatt MAIII-2, oben)

$$y(x) \Rightarrow f(x=0) = 0 \quad \text{weil alle } \sin(k \cdot 0) = 0.$$

Aus der Grenzwertbetrachtung für $x_0 = 0$ folgt:

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_0 - \varepsilon)] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_0 + \varepsilon)] \right]$$

$$f(x=0) = \frac{1}{2} [1 - 1] = 0$$

9.1.6.5. Konvergenz

Alle Fourier-Reihen sind konvergent. Die Güte der Annäherung richtet sich u.a. nach der Anzahl der berücksichtigten Oberschwingungen. In der Einleitung zu Fourier-Reihen (Abschnitt 9.1.1) war zu sehen, wie mit größerer Anzahl von Oberschwingungen die Annäherung besser wird.

Die Güte der Annäherung ist aber nicht allein von der Anzahl der berücksichtigten Oberschwingungen abhängig. Die Betrachtung der ersten beiden Bilder aus Kap. 9.1.5.2 Abschnitt A (Arbeitsblatt MAIII- 2) ergibt: Hier sind die ersten 199 Schwingungen berücksichtigt worden. Bei der Dreieck-Funktion ist eine gute Annäherung zu erkennen, aber bei der Rechteck-Funktion sind noch Unzulänglichkeiten zu erkennen. Die Güte der Annäherung richtet sich also auch nach der Kurvenform.

Die Annäherung erfolgt desto besser, je mehr Ableitungen der Original-Funktion stetig sind.

Rechteck-Funktion	0. Ableitung unstetig	
Dreieck-Funktion	0. Ableitung stetig	1. Ableitung unstetig
Parabelbögen	0. u. 1. Ableitung stetig	2. Ableitung unstetig

Die Annäherung wird von oben nach unten der aufgeführten Funktionen besser. Dieses ist auch an den Fourier-Koeffizienten der oben aufgeführten Kategorien zu erkennen.

$$\text{Rechteck-Funktion} \quad |a_k| = c \cdot 1/k$$

$$\text{Dreieck-Funktion} \quad |a_k| = c \cdot 1/k^2$$

$$\text{Parabelbögen} \quad |a_k| = c \cdot 1/k^3$$

Das heißt der Betrag der Fourier-Koeffizienten ist proportional k^{-1} , k^{-2} , oder k^{-3} . Mit k^{-3} erfolgt eine schnellere Abnahme und bessere Annäherung als mit k^{-1} . In die Abnahme mit k^{-1} , k^{-2} und k^{-3} lassen sich alle in Kap. 9.1.5.2 dargestellten Fourier-Reihen einteilen. So hat zum Beispiel der Rechteck-Impuls eine Abnahme von k^{-1} und der Dreieck-Impuls von k^{-3} .

9.1.6.6. a_0 - Berechnung mit Grenzwert

Eigentlich müssen zur vollständigen Berechnung der Fourier-Koeffizienten drei Integrale gelöst werden. Ein Trick am Beispiel: Kap. 9.1.5.2 D, Dreieck-Impuls, Arbeitsblatt MAIII-9 unten:

Aus der Integration für a_k erhält man durch Lösen des bestimmten Integrals den Ausdruck:

$$a_k = \frac{2}{\pi * \varphi} * \frac{1 - \cos(k\varphi)}{k^2}$$

Für $k = 0$ ergibt dieses einen unbestimmten Ausdruck Null durch Null für die Variable k . Die Lösung erfolgt nach der Regel von de l'Hospital (differenzieren nach k):

Zweimal differenzieren nach k :

$$a_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{\pi * \varphi} * \frac{\varphi * \sin(k\varphi)}{2k} \right\} = \frac{0}{0}$$

$$a_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{\pi \varphi} * \frac{\varphi^2 * \cos(k\varphi)}{2} \right\} = \frac{2}{\pi \varphi} * \frac{\varphi^2}{2} = \frac{\varphi}{\pi}$$

Somit kann die Integration für a_0 eingespart werden.

Achtung: Dieses Verfahren ist nicht immer möglich. Nur anwenden, wenn sich die Funktion $y(x)$ nur durch eine Funktion analytisch beschreiben läßt, Abschnitte mit Werten $y(x)=0$ sind dabei erlaubt.

9.1.6.7. Berechnung der Zahl π

Vielfach ist in den Fourier-Koeffizienten die Zahl π enthalten. Umgekehrte Idee: π -Berechnung. Beispiel aus Kap. 9.1.5.2 B Dreieck-Funktion (Arbeitsblatt MAIII-5, unten).

$$y(x) = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} * \cos(x) + \frac{1}{3^2} * \cos(3x) + \frac{1}{5^2} * \cos(5x) + \dots \right]$$

Der Funktionswert an der Stelle

$$y(x=0) = 1$$

ergibt sich aus dem Verlauf der Funktion $y(x)$. Alle Kosinus-Funktionen an der Stelle $x = 0 * k$

$$\cos(0 * k) = 1$$

weisen den Wert 1 auf. Somit läßt sich aus den Funktionswert $y(x=0)$ angeben.

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} * + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right]$$

woraus sich π^2 leicht bestimmen läßt. Ebenso läßt sich π aus der Rechteck-Funktion und π^3 aus den Parabelbögen 2. Ordnung leicht ermitteln. Die Parabelbögen 3. Ordnung würden π^4 ergeben, usw. Mit höherer Ordnung nehmen die einzelnen Terme schneller ab.

9.1.7. Komplexe Fourier-Reihe

In der reellen Fourier-Reihe

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \quad (9.1)$$

werden die trigonometrischen Funktionen durch komplexe e-Funktionen ersetzt

$$\cos(kx) = \frac{1}{2}(e^{jkx} + e^{-jkx}) \quad (9.1.7.1)$$

$$\sin(kx) = \frac{1}{2j}(e^{jkx} - e^{-jkx}) = -\frac{1}{2}j(e^{jkx} - e^{-jkx}) \quad (9.1.7.2)$$

und umgeformt:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{2}(e^{jkx} + e^{-jkx}) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(-\frac{1}{2}j\right)(e^{jkx} - e^{-jkx})$$

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k - jb_k)}{2} e^{jkx} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k + jb_k)}{2} e^{-jkx} \quad (9.1.7.3)$$

Es werden komplexe Fourier-Koeffizienten definiert:

$c_0 = \frac{a_0}{2}$	(9.11)
-----------------------	--------

$c_{+k} = \frac{a_k - jb_k}{2}$	(9.12)
---------------------------------	--------

$c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$	(9.13)
---------------------------------	--------

Der Vergleich von (9.12) und (9.13) läßt erkennen, daß der Zusammenhang konjugiert komplex gilt für:

$c_{-k} = c_k^*$	(9.14)
------------------	--------

Durch Einsetzen von (9.11) bis (9.13) in (9.1.7.3) ergibt sich die komplexe Form der Fourier-Reihe:

$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jkx}$	(9.15)
---	--------

Anstatt von drei reellen Summen ist nur noch eine komplexe Summe zu berechnen. Es müssen anstatt drei Arten von Koeffizienten a_k , b_k , und a_0 nur noch eine Art von Koeffizienten, die c_k ermittelt werden.

Berechnung der c_k und der c_{-k} aus a_k, b_k, a_0

In dem Ausdruck für die reellen Fourier-Koeffizienten (9.6) und (9.7) werden die trigonometrischen Funktionen durch (9.1.7.1) und (9.1.7.2) ersetzt:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) * \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) * \frac{1}{2}(e^{jkx} + e^{-jkx}) dx \quad (9.1.7.4)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) * \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) * \frac{1}{2j}(e^{jkx} - e^{-jkx}) dx \quad (9.1.7.5)$$

Einsetzen von (9.1.7.4) und (9.1.7.5) in (9.12) ergibt:

$$c_k = \frac{1}{2}[a_k - jb_k] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) * \frac{1}{2}(e^{jkx} + e^{-jkx}) dx - j \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) * \frac{1}{2j}(e^{jkx} - e^{-jkx}) dx \right]$$

die Formel zur Bestimmung der c_k :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) * e^{-jkx} dx \quad (9.16)$$

Die Gleichung (9.16) gilt auch für c_{-k} . Beweis: Ersetzt man in (9.16) "k" durch "-k", erhält man nach (9.14) auch den konjugiert komplexen Fourier-Koeffizienten.

Berechnung der a_k und b_k aus c_k

Addition bzw. Subtraktion von

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad (9.12)$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \quad (9.13)$$

ergibt:

$$c_k + c_{-k} = a_k$$

$$c_k - c_{-k} = -jb_k$$

oder umgeformt

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad (9.17)$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k}) \quad (9.18)$$

Aus (9.12) umgeformt:

$$a_k - jb_k = 2 c_k$$

läßt sich durch Vergleich von Real- und Imaginärteil ablesen:

$$a_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\} \quad (9.19)$$

$$b_k = -2 \operatorname{Im}\{c_k\} \quad (9.20)$$

Zusammenfassung komplexe Fourier-Reihe

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^* e^{jkx} \quad (9.15)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} y(x)^* e^{-jkx} dx \quad (9.16)$$

$$c_k = (a_k - jb_k) \frac{1}{2} \quad (9.12)$$

$$a_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\} = c_{+k} + c_{-k} \quad (9.19 / 9.17)$$

$$b_k = -2 \operatorname{Im}\{c_k\} = j^*(c_{+k} - c_{-k}) \quad (9.20 / 9.18)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \bar{y} \quad (9.11 / 9.5A)$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2} = c_k^* \quad (9.13 / 9.14)$$

Komplexe Fourier-Reihe im Zeitbereich

Substitution: $x = \omega_0 t = 2\pi f_0^* t = (2\pi/T)^* t$

$$dx = \frac{2\pi}{T} dt$$

$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^* e^{jk\omega_0 t} \quad (9.21)$
$c_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(t)^* e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (9.22)$

Beispiele zur komplexen Fourier-Reihe

Beispiel 1: (Rechteck, Kap. 9.1.5.2 B, Arbeitsblatt MAIII-5, oben)

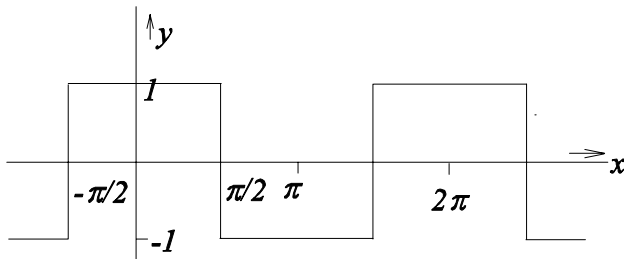


Bild MA917B

gegeben:

$$y(x) = 1 \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$y(x) = -1 \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\pi/2}^{3\pi/2} y(x) * e^{-jkx} dx$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} 1 * e^{-jkx} dx - \int_{x=\pi/2}^{3\pi/2} 1 * e^{-jkx} dx \right]$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-jk} e^{-jkx} \Big|_{x=-\pi/2}^{+\pi/2} - \frac{1}{-jk} e^{-jkx} \Big|_{x=\pi/2}^{3\pi/2} \right]$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi k} j \left[(e^{-jk\pi/2} - e^{+jk\pi/2}) - (e^{-jk3/2\pi} - e^{-jk\pi/2}) \right]$$

$$e^{-jk\frac{3}{2}\pi} = e^{jk\frac{\pi}{2}} \quad (-270^\circ \triangleq 90^\circ)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi k} j (2e^{-jk\pi/2} - 2e^{+jk\pi/2}) = \frac{2}{\pi k} \frac{1}{2j} (e^{jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2})$$

$$c_k = \frac{2}{\pi k} * \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{rein reell}$$

$$a_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\} = (4/\pi k) * \sin(k\pi/2)$$

$$b_k = -2 \operatorname{Im}\{c_k\} = 0$$

$$a_0 = 2\bar{y} = 0 \quad \text{Achtung!}$$

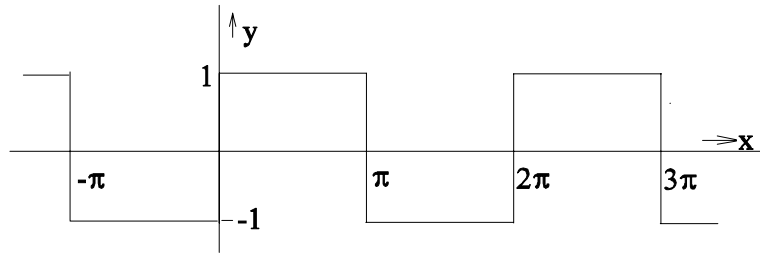
Beispiel 2: (Rechteck, Kap. 9.1.5.2 A, Arbeitsblatt MAIII-2 oben)

Bild MA917B

gegeben: $y(x) = 1$ $0 < x < \pi$
 $y(x) = -1$ $\pi < x < 2\pi$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} y(x) * e^{-jkx} dx$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x=0}^{\pi} e^{-jkx} dx - \int_{x=\pi}^{2\pi} e^{-jkx} dx \right]$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-jk} e^{-jkx} \Big|_{x=0}^{\pi} - \frac{1}{-jk} e^{-jkx} \Big|_{x=\pi}^{2\pi} \right]$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi k} j \left[(e^{-jk\pi} - e^{-j0}) - (e^{-jk2\pi} - e^{-jk\pi}) \right]$$

$$e^{j0} = 1 \quad e^{-jk2\pi} = 1 \quad e^{-jk\pi} = (-1)^k$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi k} j [(-1)^k - 1 - 1 + (-1)^k] = \frac{1}{\pi k} [-1 + (-1)^k] j$$

$$a_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\} = 0$$

$$b_k = -2 \operatorname{Im}\{c_k\} = \frac{2}{\pi k} [1 - (-1)^k]$$

$$a_0 = 0 \quad \text{weil } \bar{y} = 0$$

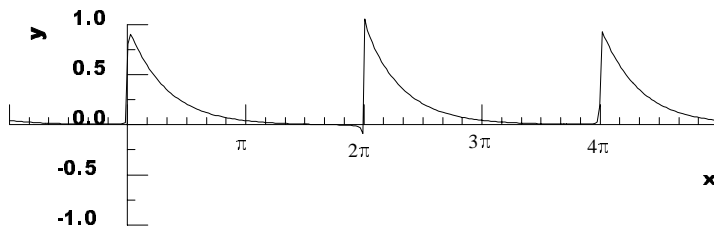
Beispiel 3:

Bild MA917C

gegeben: $y(x) = e^{-x}$ $0 < x < 2\pi$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} y(x) * e^{-jkx} dx$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-x} * e^{-jkx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} e^{-(1+jk)x} dx$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} * \frac{1}{-(1+jk)} e^{-(1+jk)x} \Big|_{x=0}^{2\pi}$$

$$c_k = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+jk} [e^{-(1+jk)2\pi} - e^{-(1+jk)0}] \quad e^{-jk2\pi} = 1$$

$$c_k = -\frac{1}{2\pi k} \frac{1}{1+jk} [e^{-2\pi} - 1] = \frac{1}{2\pi} [1 - e^{-2\pi}] \frac{1-jk}{1+k^2}$$

$$a_k = 2 \operatorname{Re} \{ c_k \} = \frac{1}{\pi} [1 - e^{-2\pi}] \frac{1}{1+k^2}$$

$$b_k = -2 \operatorname{Im} \{ c_k \} = \frac{1}{\pi} [1 - e^{-2\pi}] * \frac{k}{1+k^2}$$

$$a_0 = 2 \operatorname{Re} \{ c_0 \} = \frac{1}{\pi} [1 - e^{-2\pi}] \quad (k=0 \text{ hier möglich, weil keine Division durch Null})$$

9.1.8. Numerische Fourier-Analyse

Bislang sind die Fourier-Koeffizienten a_k, b_k aus abschnittsweise analytischen Funktionen $y(x)$ berechnet worden. Wenn z.B. eine Messung eines Zeitverlaufes vorgenommen wird, erhält man nur Funktionswerte zu bestimmten Zeitpunkten. Diese Funktionswerte sind meistens in gleichmäßigen Abstand der unabhängigen Variablen (t-Zeit) gegeben. Korrekter Ausdruck: Diskrete Funktionswerte in äquidistanten Abständen.

Problemstellung:

Gemessen (oder gegeben) sind:

$n+1$ diskrete Funktionswerte y_0, y_1, \dots, y_n einer periodischen Funktion $y(i \cdot \Delta x)$

mit der Periode in x von

$$x_{\text{periode}} = 2\pi$$

Die x -Werte weisen einen Abstand auf von:

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n}$$

Damit ergeben sich die diskreten x Werte zu:

$$x_i = i \cdot \Delta x = i \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Aus der Periodizitätsbedingung folgt:

$$y(x+2\pi) = y(x)$$

$$y_n = y_0$$

Damit ergeben sich n unabhängige Werte-Paare

$$(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n-1$$

zur Bestimmung einer numerischen Fourier-Reihe.

Ansatz einer diskreten Fourier-Reihe:

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m [A_k \cdot \cos(kx) + B_k \cdot \sin(kx)] \quad (9.23)$$

An den diskreten Meßpunkten ergibt sich (9.23) zu:

$$g(i\Delta x) = g\left(i \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left[A_k \cdot \cos\left(ki \frac{2\pi}{n}\right) + B_k \cdot \sin\left(ki \frac{2\pi}{n}\right) \right] \quad (9.24)$$

Aufgabenstellung:

Die Fourier-Koeffizienten A_k, B_k der numerischen Fourier-Reihen sind aus den n diskreten Meßwerten (x_i, y_i) zu bestimmen. Es treten dabei zwei Fragestellungen auf:

- Wie werden die Koeffizienten A_k, B_k bestimmt?
- Wieviele Koeffizienten A_k, B_k können bestimmt werden?

Anzahl der Koeffizienten:

Eine Kurvenanpassung für n Meßwerte läßt sich eindeutig mit n Koeffizienten durchführen. Für mehr als n Koeffizienten wäre das sich ergebende Gleichungssystem überbestimmt. Weniger als n Koeffizienten ist möglich, dann verläuft die angepaßte Funktion nicht durch alle Meßpunkte (vergleiche lineare Regression, Kurvenanpassung, 2. Semester).

Aus (9.23) ergeben sich

$$1 + 2m = n \quad \text{Anzahl der Koeffizienten}$$

Diese Anzahl der Koeffizienten soll kleiner gleich der Anzahl der Meßpunkte n sein:

$$1 + 2m \leq n$$

$$m \leq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

Da m ganzzahlig sein muß und die Anzahl der Meßwerten in der Praxis meist eine gerade Zahl ist, ergibt sich für m :

$$m \leq \frac{n}{2} - 1 \quad (9.25)$$

Berechnung der Koeffizienten

Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten geschieht in analoger Weise zum kontinuierlichen Verlauf (Kap. 9.1.4), nur die Integrale werden durch Summen ersetzt.

A₀-Bestimmung

Die Fourier-Reihe

$$g(i\Delta x) = g\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left[A_k \cos\left(ki\frac{2\pi}{n}\right) + B_k \sin\left(ki\frac{2\pi}{n}\right) \right] \quad (9.24)$$

wird zur A_0 Bestimmung an allen diskreten Stellen $x_i = i\Delta x = i\frac{2\pi}{n}$ aufsummiert:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m \left[A_k \cos\left(ki\frac{2\pi}{n}\right) + B_k \sin\left(ki\frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

Die n fache Summation einer Konstanten ergibt n mal die Konstante. Die Reihenfolge der Summation wird vertauscht. Die nicht von i abhängigen Koeffizienten A_k, B_k können vor die innere Summe gezogen werden:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = n \cdot \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m A_k \sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(i\frac{k2\pi}{n}\right) + \sum_{k=1}^m B_k \sum_{i=0}^{n-1} \sin\left(i\frac{k2\pi}{n}\right)$$

Die Summation einer Schwingung über eine Periode ergibt Null:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = 0 = \sum_{i=0}^{n-1} \sin\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = n \cdot \frac{A_0}{2}$$

die Bestimmungsgleichung für A_0 :

$$A_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad (9.26)$$

A_k-Bestimmung

Die Reihe

$$g(i\Delta x) = g\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left[A_k \cos\left(ki\frac{2\pi}{n}\right) + B_k \sin\left(ki\frac{2\pi}{n}\right) \right] \quad (9.24)$$

wird mit $\cos[i(2\pi m/n)]$ multipliziert und über i aufsummiert:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(i\frac{2\pi}{n}\right) \cos\left(i\frac{m2\pi}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m A_k \cos\left(ki\frac{2\pi}{n}\right) + \sum_{k=1}^m B_k \sin\left(ki\frac{2\pi}{n}\right) \right] \cos\left(i\frac{2\pi m}{n}\right)$$

und umgeformt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{m2\pi}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A_0}{2} \cos\left(i\frac{2\pi m}{n}\right) + \sum_{k=1}^m A_k \sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(i\frac{2\pi k}{n}\right) \cos\left(i\frac{2\pi m}{n}\right) + \sum_{k=1}^m B_k \sum_{i=0}^{n-1} \sin\left(i\frac{2\pi k}{n}\right) \cos\left(i\frac{2\pi m}{n}\right)$$

Ähnlich wie bei den Integralen ergeben die Summen von sin und cos Termen und die Summe von cos Termen verschiedener Frequenzen aufsummiert über eine Periode gleich Null :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(i\frac{2\pi k}{n}\right) \cos\left(i\frac{2\pi m}{n}\right) = 0 \quad k \neq m$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(i\frac{2\pi k}{n}\right) \sin\left(i\frac{2\pi m}{n}\right) = 0$$

Die Summe von Quadraten einer Schwingung ergibt:

$$\sum_{i=0}^n \cos^2\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2} \quad n \geq 3$$

weil der Mittelwert von $\cos^2(x)$ den Wert 0.5 aufweist. Schon bekannt

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(i\frac{2\pi}{n}\right) = 0$$

Aus der oberen Doppelsumme folgt dann mit Hilfe der letzten vier Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(i\frac{2\pi}{n}\right) \cos\left(i\frac{k2\pi}{n}\right) = A_k \frac{n}{2}$$

weil alle anderen Summen Null ergeben und die Summe gleicher Frequenzen bekannt ist. Umgestellt nach A_k ergibt sich mit

$$y_i = g\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$$

die Bestimmungsgleichung für die A_k

$$A_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos\left(i \frac{k2\pi}{n}\right) \quad (9.27)$$

B_k läßt sich in analoger Weise bestimmen:

$$B_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin\left(i \frac{k2\pi}{n}\right) \quad (9.28)$$

Zusammenfassung:

Die periodische Funktion $y(x)$ mit der Periode 2π in x ist an den diskreten Werten gegeben:

$$x_i = i \cdot \Delta x = i \frac{2\pi}{n}, \quad y(x_i) = y_i \quad i = 0 \dots n$$

$$\text{Bedingungen: } y_0 = y_n \quad n - \text{geradzahlig} \quad m \leq \frac{n}{2} - 1$$

Die Funktion $y(x)$ wird angenähert durch

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n/2-1} [A_k \cdot \cos(kx) + B_k \cdot \sin(kx)]$$

mit

$$A_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

$$A_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos\left(i \frac{k2\pi}{n}\right)$$

$$B_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin\left(i \frac{k2\pi}{n}\right)$$

Die Koeffizienten A_0, A_k, B_k , lassen sich heute mit Hilfe eines Rechnerprogramms sehr schnell berechnen. Früher wurden noch Hinweise zum vereinfachten Rechnen gegeben.

Hinweis zum Zeitbereich

Für einen aufgenommenen Zeitverlauf muß (wie schon in vorigen Abschnitten) x durch $\omega_0 t$ ersetzt werden

$$x = \omega_0 \cdot t \quad (9.2)$$

Anwendung in der Praxis

Die in diesem Abschnitt 9.1.8 dargestellte Theorie ist Grundlage für die FFT (Fast-Fourier-Transformation). Diese findet Anwendung in Frequenzanalytoren, die aus einem Eingangssignal das Frequenzspektrum berechnen und grafisch anzeigen. Liegen nur digitalisierte Meßwerte vor, muß mit Hilfe der oben dargestellten Theorie das Frequenzspektrum berechnet werden.

Beispiel:

Der Koeffizient B_3 der Rechteck-Funktion aus Kap. 9.1.5.2 A (Arbeitsblatt MAIII-2, oben) soll bestimmt werden mit $n = 12$.

$$y\left(i\frac{2\pi}{12}\right) = 0 \quad x_i = 0^\circ \quad i = 0$$

$$y\left(i\frac{2\pi}{12}\right) = 1 \quad x_i = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ \quad i = 1\dots5$$

$$y\left(i\frac{2\pi}{12}\right) = 0 \quad x_i = 180^\circ \quad i = 6$$

$$y\left(i\frac{2\pi}{12}\right) = -1 \quad x_i = 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ \quad i = 7\dots11$$

$$B_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin\left(i\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) \quad k = 3 \quad n = 12$$

$$B_3 = \frac{2}{12} \sum_{i=0}^{11} y_i \cdot \sin\left(i\frac{3 \cdot 2\pi}{12}\right)$$

$$\frac{6}{12}\pi \triangleq 90^\circ$$

$$B_3 = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{11} y_i \cdot \sin(i \cdot 90^\circ)$$

i	y_i	$\sin(i90^\circ)$	$y_i \cdot \sin(i90^\circ)$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	1	0	0
3	1	-1	-1
4	1	0	0
5	1	1	1
6	0	0	0
7	-1	-1	1
8	-1	0	0
9	-1	1	-1
10	-1	0	0
11	-1	-1	1
			$\Sigma = 2$

$$B_3 = \frac{1}{6} \cdot 2 = 0.3333$$

Auf Arbeitsblatt MAIII-2 ist der reelle Fourier-Koeffizient angegeben:

$$b_3 = 4/(3\pi) = 0.4244$$

Für den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ würde auch $B_3 \rightarrow 0.4244$ sich den Werte von b_3 annähern.

9.2. Fourier-Integral

Bislang wurden periodische Vorgänge betrachtet. Nach der Periode 2π oder T wiederholte sich der Kurvenverlauf. Der Zeitverlauf war durch eine Summe von Sinus- und Kosinus-Funktionen darstellbar. Die einzelnen Amplituden der Oberschwingungen sagten etwas über die Frequenzanteile, welche im Signal vorhanden sind, aus. Dieses ist u.a. bei der Signalübertragung von Interesse.

Bei einzelnen, nicht periodischen, Signalen (z.B. Impuls) ist manchmal auch die Frequenzzusammensetzung gesucht. Dazu die folgende Betrachtung nach Bild MA92A (Arbeitsblatt MAIII-13): Für eine Rechteck-Schwingung mit der Impulsdauer $T_i = 1$ s und der Periodendauer $T_p = 2$ s nehmen die Frequenzkomponenten (rechts dargestellt) vom Betrag her relativ schnell mit der Ordnung der Oberschwingung ab. Hier beträgt das Verhältnis von Impulsbreite zur Periodendauer $T_i/T_p = 1/2$.

Wie bekommt man das Frequenzspektrum eines einzelnen Signals? Wenn die Impulsbreite gleich bleibt und die Periodendauer erhöht wird, entspricht dieses schon eher einem Einzelsignal.

Die Frequenzanalyse von Signalen mit größer werdender Periodendauer T_p zeigen die unteren drei Frequenzanalysen in Bild MA92A (Arbeitsblatt MAIII-13). Anstatt schnell mit der Ordnung der Oberschwingungen abnehmender Amplituden, ergeben sich mit größer werdender Periodendauer T_p immer mehr Frequenzkomponenten die direkt nebeneinander liegen und die Amplitude wird entsprechend kleiner.

Wie erhält man nun aus einem periodischen Signal ein nicht periodisches Signal? Antwort: Wenn läßt die Periodendauer T_p als Grenzwert gegen ∞ gehen, dann ist nur ein Signal vorhanden. Das bewirkt dann im Frequenzspektrum unendlich viele **infinitesimal** kleine Frequenzanteile ($0^{\infty} = \text{endlicher Wert}$).

T_p	→	∞
periodisches Signal	→	einmaliges Signal
diskretes Frequenzspektrum	→	kontinuierliches Frequenzspektrum
endliche Amplitude	→	infinitesimal kleine Amplitude

Arbeitsblatt MAIII-13

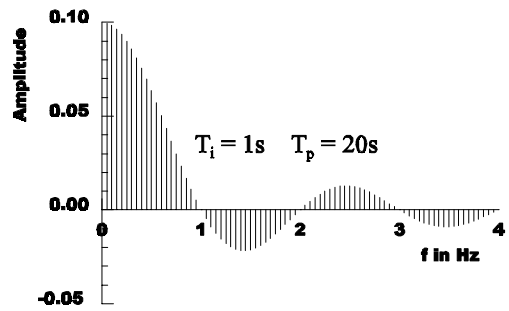
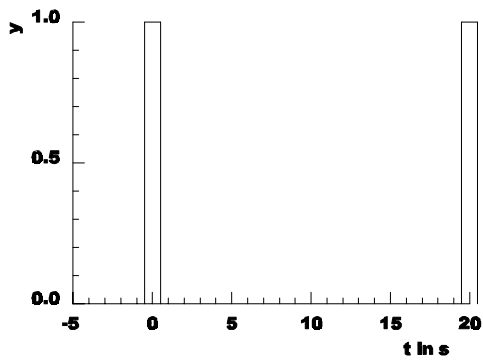
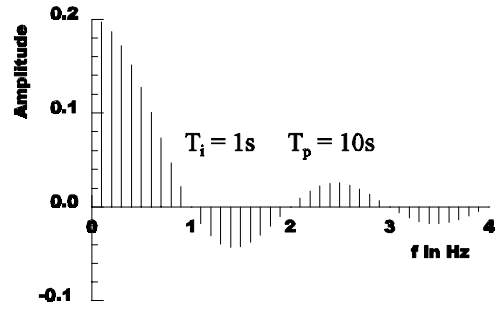
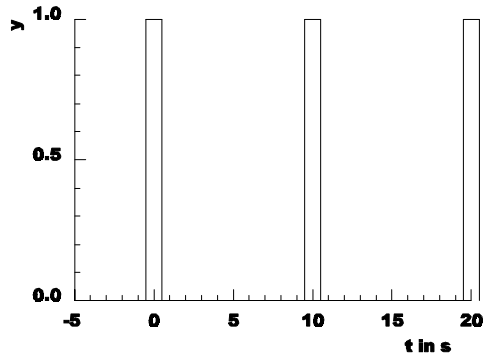
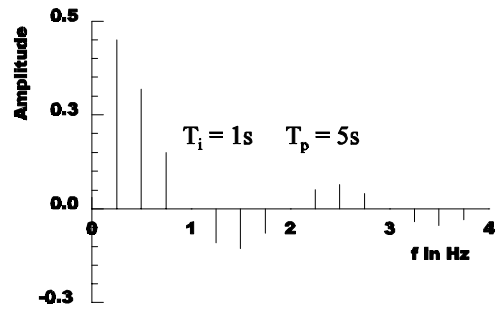
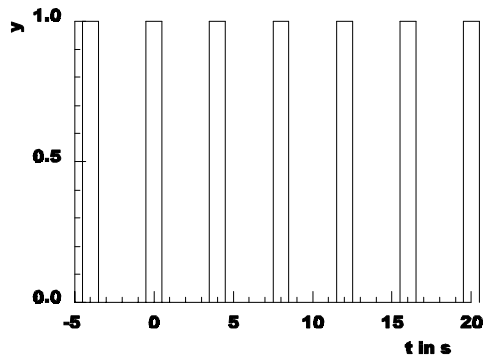
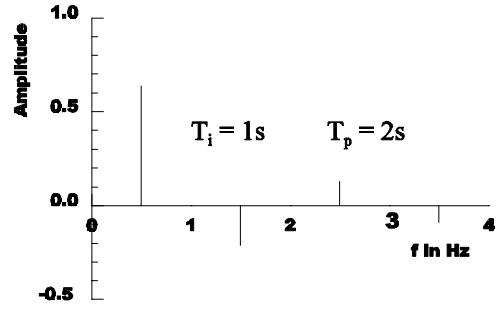
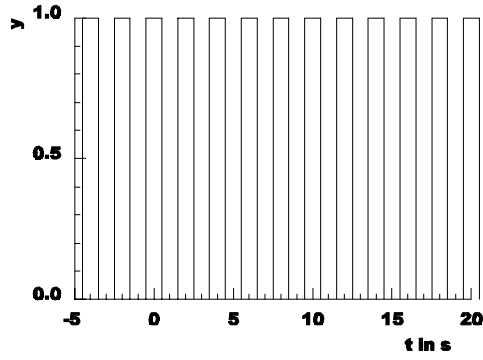


Bild MA92A

Zwecks mathematischer Beschreibung sollen die Ergebnisse der komplexen Fourier-Reihe aus Kap. 9.1.7 mit der abhängigen Variablen t noch einmal angegeben werden:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k * e^{jk\omega_0 t} \quad (9.21)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{+T/2} y(t) * e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{aus (9.22)}$$

Die folgende Ableitung ist nicht immer im mathematischen Sinne vollständig korrekt, dafür aber übersichtlich. Mit Hilfe des Grenzüberganges

$$T \rightarrow \infty$$

ergeben sich mit $k = -\infty \dots +\infty$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$$

$$k * \omega_0 \rightarrow \omega$$

$$c_k \rightarrow dc_k$$

aus (9.22) die infinitesimal kleinen Frequenzamplituden:

$$dc_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \{c_k\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{+T/2} y(t) * e^{-jk\omega_0 t} dt \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \right\} * \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) * e^{-j\omega t} dt$$

Es gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \right) = df$$

Damit läßt sich die infinitesimal kleiner Frequenzamplitude angeben als:

$$dc_k = df \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) * e^{-j\omega t} dt$$

$Y(\omega)$ wird als Amplitudendichte-Spektrum der Frequenz definiert:

$$Y(\omega) = \frac{dc_k}{df}$$

$Y(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) * e^{-j\omega t} dt \quad (9.29)$
--

Mit

$$dc_k = Y(\omega) * df = Y(\omega) * d\omega / 2\pi \quad k\omega_0 = \omega$$

und

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k * e^{jk\omega_0 t} \quad (9.21)$$

folgt für $y(t)$ bei Übergang vom Summen- zum Integralzeichen:

$$y(t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} dc_k * e^{j\omega t} = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} Y(\omega) * \frac{d\omega}{2\pi} * e^{j\omega t}$$

$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} Y(\omega) * e^{j\omega t} * d\omega \quad (9.30)$
--

Zusammenfassung der Formeln für das Fourier-Integral:

$Y(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) * e^{-j\omega t} dt \quad (9.29)$
--

$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} Y(\omega) * e^{j\omega t} d\omega \quad (9.30)$
--

Konvergenz-Bedingung für $y(t)$ ohne Ableitung:

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |y(t)| dt < \infty$$

Das Fourier-Integral ist konvergent, wenn das Integral des Betrages der Zeitfunktion existiert, also einen endlichen Wert aufweist.

Hinweis: In einigen Literaturstellen wird das Fourier-Integral nicht in komplexer Form, sondern mit sin und cos Termen angegeben.

Diese Ableitung ist in Bezug auf zwei Punkte wichtig. Zum einem kann hiermit die Frequenzzusammensetzung eines Signals untersucht werden, z.B. dafür ob ein Signal von einer Leitung übertragen werden kann. Zum andern dient dieser Abschnitt als Vorbereitung auf Kap. 11.

Beispiel:

Das Amplitudendichte-Spektrum $Y(\omega)$ bzw. $Y(f)$ eines einmaligen Rechteck-Impulses der Höhe h und der Breite t_1 nach Bild MA92B soll bestimmt werden.

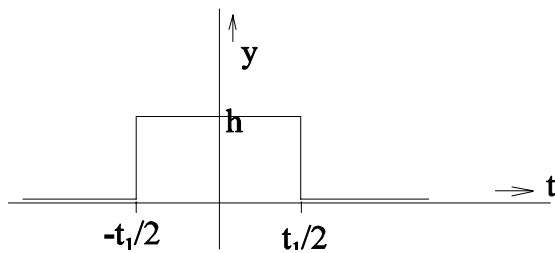


Bild MA92B:

gegeben:

$$y(t) = h \quad -t_1/2 < t < t_1/2$$

$$y(t) = 0 \quad t < -t_1/2 \text{ und } t > t_1/2$$

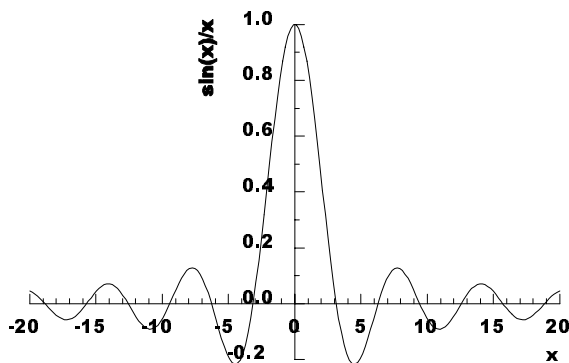
$$Y(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) * e^{j\omega t} dt$$

$$Y(\omega) = \int_{t=-t_1/2}^{t_1/2} h * e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} h * e^{-j\omega t} \Big|_{t=-t_1/2}^{t_1/2} = -\frac{1}{j\omega} h [e^{-j\omega t_1/2} - e^{+j\omega t_1/2}]$$

$$Y(\omega) = \frac{h}{j\omega} [e^{+j\omega t_1/2} - e^{-j\omega t_1/2}]$$

$$Y(\omega) = \frac{2h}{\omega} * \frac{[e^{j\omega t_1/2} - e^{-j\omega t_1/2}]}{2j} = \frac{2h}{\omega} * \sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right) \quad (9.2.1)$$

Hinweis: $\int_{t=0}^x \frac{\sin(t)}{t} dt = Si(x)$ - Integralsinus

Bild MA92C: Die Funktion $\sin(x)/x$

Die Umformung von (9.2.1) mit $\omega = 2\pi f$ ergibt:

$$Y(f) = \frac{2h}{2\pi f} \sin\left(\frac{2\pi f t_1}{2}\right) = \frac{h}{\pi f} \sin(\pi f t_1)$$

das Frequenzspektrum des in Bild MA92B dargestellten Impulses:

$$Y(f) = h * t_1 * \left(\frac{\sin(\pi f * t_1)}{\pi f * t_1} \right)$$

In Bild MA92D ist das Amplitudendichtespektrum des Rechteckimpulses der Höhe h und der Breite t_1 grafisch dargestellt. Das Spektrum in Bild MA92D lässt sich mit Hilfe anderer Achsenskalierung aus Bild MA92C konstruieren:

	Bild MA92C	Bild MA92D
Funktion	$\frac{\sin(x)}{x}$	$Y(f)$
Maximalwert	1	$h * t_1$
1. Nulldurchgang > 0	$x = \pi$	$\pi f * t_1 = \pi \quad f = \frac{1}{t_1}$

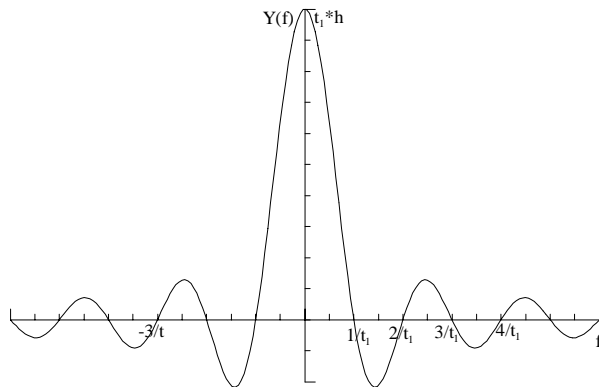


Bild MA92D: Amplitudendichte-Spektrum des Rechteck-Impulses, Breite t_1 und Höhe h

9.3. Anwendungsbeispiel aus der Elektrotechnik für Fourier-Reihe und Fourier-Integral

Aufgabenstellung:

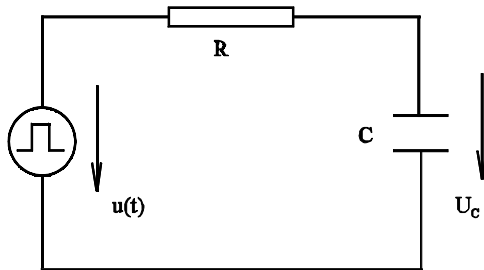


Bild MA93A

gegeben: $R = 10 \text{ k}\Omega$ $C = 1 \mu\text{F}$ $R \cdot C = 10 \text{ ms}$
 Spannung u : Rechteckimpuls der Breite 10 s und der Höhe 10 V

gesucht: $u_c(t)$

Beispiel 1: Periodischer Impuls mit der Periodendauer $T_p = 30 \text{ ms}$, siehe Bild MA93B

Beispiel 2: Einzelimpuls, siehe Bild MA93C

Beispiel 1:

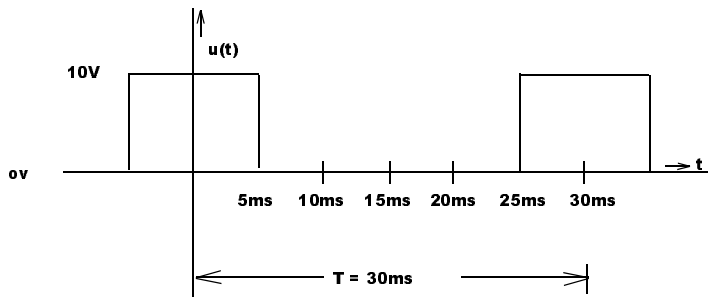


Bild MA93B

Beispiel 2:

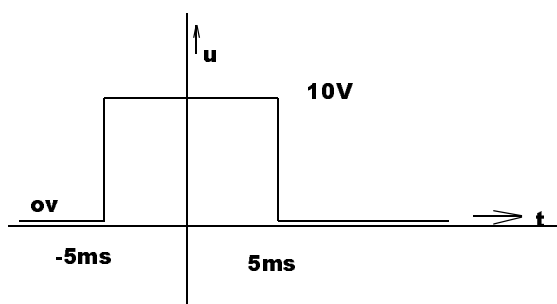


Bild MA93C

Lösungsstrategie:

Das Signal $u(t)$ wird auf die Frequenzkomponenten untersucht:

- Beispiel 1: mit Hilfe der Fourier-Reihe
 Beispiel 2: mit Hilfe des Fourier-Integrals.

Auf jede Frequenzkomponente wird die komplexe Rechnung angewandt und zum Schluß werden alle Frequenzkomponenten zu der gesuchten Spannung überlagert.

Komplexer Zusammenhang zwischen \underline{U} und U_c um:

Die komplexe Größe \hat{u}_c wird als Funktion von ω mit Hilfe der Spannungsteilerregel berechnet:

$$\frac{\hat{u}_c}{\hat{u}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{1/(RC)}}$$

$$\hat{u}_c = \hat{u} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}} = \hat{u} \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{100 \text{ s}^{-1}}} \quad (9.3.1)$$

$$\omega_1 = (R \cdot C)^{-1} = 100 \text{ s}^{-1}$$

zu Beispiel 1:

Die Funktion $u(t)$ nach Beispiel 1 (Bild MA93B) muß als Fourier-Reihe entwickelt werden, entweder mit Hilfe der Integralformeln (9.5), (9.6) und (9.7) oder durch Vergleich mit einer bekannten Fourier-Reihe. Die auf Arbeitsblatt MAIII-9 oben dargestellte Fourier-Reihe entspricht von der Form dem Spannungsverlauf nach Beispiel 1. Ein Vergleich ergibt:

$$\varphi = 360^\circ \cdot \frac{5 \text{ ms}}{30 \text{ ms}} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

Die Reihe auf Arbeitsblatt MAIII-9 muß mit 10 V multipliziert werden.

Die Reihe $u(t)$ muß im Zeitbereich angegeben werden. Aus (9.4) erhält man:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{30 \text{ ms}} = 209.4 \frac{1}{\text{s}}$$

Setzt man den Maximalwert zu 10 V und ersetzt x durch $\omega_0 \cdot t$, erhält man aus Arbeitsblatt MAIII-9 (oben) die Fourier-Reihe:

$$u(t) = 10 \text{ V} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi/3}{2} + \sin(60^\circ) \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{\sin(120^\circ)}{2} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{\sin(180^\circ)}{3} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \dots \right]$$

$$u(t) = \frac{10 \text{ V}}{3} + \frac{20 \text{ V}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(60^\circ \cdot k) \cdot \cos(k\omega_0 t) \cdot \frac{1}{k}$$

Die Spannung $u(t)$ ergibt sich aus der Summe des Gleichspannungsanteils U_0 , der Grundschwingung $u_1(t)$ und den Oberschwingungen $u_k(t)$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \quad (9.3.2)$$

Ein Vergleich der letzten beiden Gleichungen liefert:

$$U_0 = \frac{10 \text{ V}}{3}$$

$$u_k(t) = \frac{20 \text{ V}}{\pi} \sin(60^\circ * k) * \frac{1}{k} \cos(k\omega_0 t)$$

Die obere zeitabhängige Größe wird mit Hilfe der komplexen Rechnung in komplexe Scheitelwertzeiger transformiert:

$$\hat{u}_k = \frac{20 \text{ V}}{\pi} * \sin(60^\circ * k) * \frac{1}{k} * \underline{1} \quad \omega_k = k * \omega_0 \quad (9.3.4)$$

Berechnung des Gleichanteils:

Für eine Gleichspannung wirkt der Kondensator nach Bild EG93A wie offene Klemmen, der Gleichspannungsanteil der Quelle liegt voll am Kondensator:

$$u_{c0} = \frac{10 \text{ V}}{3} \quad (9.3.5)$$

Berechnung der k-ten Oberschwingung:

Für die k-te Oberschwingung der Spannung u_{ck} (erster Index "C" für Kondensator, zweiter Index "k" für k-te Oberschwingung $\omega = \omega_0 * k$) ergibt sich aus Gleichung 9.3.1:

$$\hat{u}_{Ck} = \hat{u}_k * \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} = \hat{u}_k * \frac{1}{1 + j \frac{k * \omega_0}{\omega_1}}$$

Aus (9.3.4) und der oberen Gleichung lassen sich die Scheitelwertzeiger der einzelnen Schwingungen bestimmen:

$$\hat{u}_{Ck} = \frac{20 \text{ V}}{\pi} * \frac{\sin(60^\circ * k)}{k} * \frac{1}{1 + j k \frac{\omega_0}{\omega_1}}$$

$$\hat{u}_{ck} = \frac{20 \text{ V} * \sin(60^\circ * k)}{\pi k * \sqrt{1 + (k * \omega_0 / \omega_1)^2}} * e^{-j \arctan(k \omega_0 / \omega_1)}$$

Die Zurücktransformation des oberen Scheitelwertzeigers ergibt:

$$u_{Ck}(t) = \frac{20 \text{ V} * \sin(60^\circ * k)}{\pi k * \sqrt{1 + (k * \omega_0 / \omega_1)^2}} * \cos[k\omega_0 t - \arctan(k\omega_0 / \omega_1)] \quad (9.3.6)$$

Aus der Überlagerung (9.3.2) von Gleichanteil (9.3.5) und der Schwingungen (9.3.6) läßt sich der Zeitverlauf der Kondensator-Spannung u_c am angeben:

$$u_c(t) = \frac{10 \text{ V}}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20 \text{ V} * \sin(60^\circ * k)}{\pi k * \sqrt{1 + (k * \omega_0 / \omega_1)^2}} * \cos[k\omega_0 t - \arctan(k\omega_0 / \omega_1)]$$

Einsetzen von Zahlenwerten:

$$\omega_0 = 209.4 \text{ s}^{-1} \quad \omega_1 = 100 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0 / \omega_1 = 2.094$$

$$u_C(t) = \frac{10 \text{ V}}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20 \text{ V} * \sin(60^\circ * k)}{\pi k * \sqrt{1 + (k * 2.094)^2}} * \cos[k * 209.4 \text{ s}^{-1} t - \arctan(k * 2.094)] \quad (9.3.7)$$

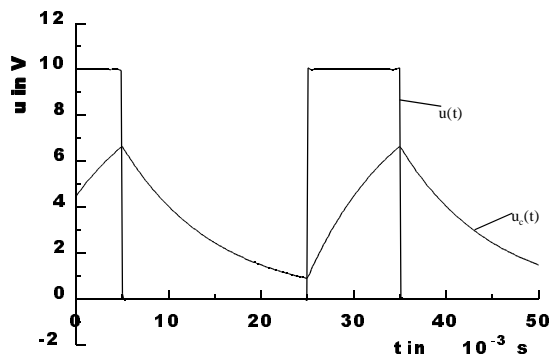


Bild MA93D: Ergebnis der Reihenentwicklung (9.3.7)

zu Beispiel 2:

Aus dem Beispiel des Abschnittes 9.2 ist das Fourier-Integral eines Rechteckimpulses der Höhe h und der Breite t_1 bekannt:

$$Y(\omega) = \frac{h}{j\omega} [e^{j\omega t_1/2} - e^{-j\omega t_1/2}]$$

Oberere Formel und der Vergleich der Bilder MA92B und MA93C liefert:

$$\underline{U}(\omega) = \frac{10 \text{ V}}{j\omega} [e^{j\omega t_1/2} - e^{-j\omega t_1/2}] \quad t_1 = 10 \text{ ms}$$

Mit Hilfe der oberen Gleichung und (9.3.1) lässt sich die komplexe Amplitudendichte angeben:

$$\underline{U}_C(\omega) = \underline{U}(\omega) * \frac{1}{1 + j\omega/\omega_1}$$

$$\underline{U}_C(\omega) = \frac{10 \text{ V}}{j\omega} * \frac{e^{j\omega t_1/2} - e^{-j\omega t_1/2}}{1 + j\omega/\omega_1}$$

Die Rücktransformation vom Frequenz in den Zeitbereich erfolgt mit Hilfe von (9.30):

$$u_C(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \underline{U}_C(\omega) * e^{j\omega t} d\omega$$

$$U_C(t) = \frac{10 \text{ V}}{j2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t_1/2} - e^{-j\omega t_1/2}}{(1 + j\omega/\omega_1)\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

Das obere Integral besitzt keine Stammfunktion und kann mit den schon bekannten Methoden nicht gelöst werden. Mit Hilfe der Funktionentheorie (u.a. komplexe Integrale) sind manche Integrale in den Grenzen bis ∞ lösbar. Die Funktionentheorie soll hier nicht behandelt werden.

Die Kapitel 9.2 und 9.3 sollten als Vorbereitung auf Kap. 11 dienen. Dort wird für das Lösen der gestellten Aufgabe ein einfaches Konzept angegeben. $Y(\omega)$ wird direkt durch Tabellen in den Zeitbereich zurücktransformiert. Wie wird das Fourier-Integral berechnet? Eine Zeitfunktion ist in den Frequenzbereich transformiert worden. Die Frequenzfunktion wird dann bearbeitet (multipliziert, gefiltert) und wieder zurück transformiert. Dieses Prinzip wird dann in Kap. 11 erläutert.

Mit Hilfe des nächsten Kapitels 10 (DGL) sind die letzten beiden Aufgaben auch ohne Transformation, auf eine andere Methode lösbar.

Arbeitsblatt MAIII-14**9.4. Zusammenfassung der wichtigsten Formeln aus Kapitel 9****Reelle Fourier-Reihe in x:**

Die in 2π periodische Funktion $y(x)$ wird mit Hilfe der Reihe

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(kx) \quad (9.1)$$

angepaßt werden. Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich mit Hilfe der folgenden Formeln bestimmen:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) dx \quad (9.5) \quad a_0 = 2\bar{y} \quad (9.5A)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) \cdot \cos(kx) dx \quad (9.6)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x=x_1}^{x_1+2\pi} y(x) \cdot \sin(kx) dx \quad (9.7)$$

Reelle Fourier-Reihe in t:

Für zeitabhängige Größen wird x substituiert durch.

$$x = \omega_0 t \quad (9.2)$$

Somit ergibt sich die Fourier-Reihe in t

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \quad (9.3)$$

mit

$$\omega_0 = 2\pi/T \quad (9.4) \quad T - \text{Periode Grundschwingung}$$

und den Koeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t=t_1}^{t_1+T} y(t) dt \quad (9.8) \quad a_0 = 2\bar{y} \quad (9.5A)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t=t_1}^{t_1+T} y(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt \quad (9.9)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t=t_1}^{t_1+T} y(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt \quad (9.10)$$

Arbeitsblatt MAIII-15**Komplexe Fourier-Reihe**

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k * e^{jkx} \quad (9.15)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} y(x) * e^{-jkx} dx \quad (9.16) \quad c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} \quad (9.12)$$

$$a_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\} = c_{+k} + c_{-k} \quad (9.19 / 9.17)$$

$$b_k = -2 \operatorname{Im}\{c_k\} = (c_{+k} - c_{-k}) * j \quad (9.20 / 9.18)$$

Für die komplexe Fourier-Reihe im Zeitbereich wird x mit Hilfe von (9.2) und (9.4) substituiert:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k * e^{jk\omega_0 t} \quad (9.21)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(t) * e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (9.22)$$

Numerische Fourier-Analyse

Die periodische Funktion in x mit der Periode 2π ist an den diskreten Werten gegeben:

$$x_i = i * \Delta x = i \frac{2\pi}{n} \quad y(x_i) = y_i \quad \Delta x = \frac{2\pi}{n} \quad i = 0 \dots n$$

Bedingung: $y_0 = y_n$ (9.25)
 $m \leq \frac{n}{2} - 1$ n - geradzahlig

Darstellbar durch

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m [A_k * \cos(kx) + B_k * \sin(kx)] \quad (9.25)$$

mit

$$A_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad (9.26)$$

$$A_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i * \cos\left(i \frac{k2\pi}{n}\right) \quad (9.27)$$

$$B_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i * \sin\left(i \frac{k2\pi}{n}\right) \quad (9.28)$$

Fourier-Integral

$$Y(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) * e^{-j\omega t} dt \quad (9.29)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} Y(\omega) * e^{j\omega t} d\omega \quad (9.30)$$

Bedingung für y(t)

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |y(t)| dt < \infty$$

10. Gewöhnliche Differentialgleichungen

10.1. Einführung

Die Überschrift des Kapitels 10 enthält drei Teile:

- gewöhnlich
- Differential und
- Gleichung

Der Ausdruck **gewöhnlich** soll im Abschnitt 10.2.7 erläutert werden.

Eine **Gleichung** ist schon längst aus der Schule bekannt.

Die **Differential-Rechnung** wurde im ersten und zweiten Semester ausführlich behandelt.

Was bedeutet nun der zusammengesetzte Ausdruck Differentialgleichung (Kurzform: DGL)? Eine normale Gleichung enthält Variable und Konstanten:

$$\text{z.B. } y = ax^2 + bx + c \quad \text{oder} \quad x = 3x^2 + 5$$

Wenn eine Gleichung auch noch die Ableitungen einer Variablen enthält, spricht man von **Differentialgleichungen**:

$$\begin{aligned} \text{z.B. } y + y' &= 5 \\ y*y' + x*y'' &= 3x^2 \\ y'' + y' + y''' &= x*y^4 \end{aligned}$$

Wann erhält man eine Differentialgleichung oder wozu werden Differentialgleichungen benötigt? Antwort: Beim Aufstellen und Umformen von physikalischen Gleichungen, in denen die Ableitung einer physikalischen Größe betrachtet wird, ergeben sich Differentialgleichungen.

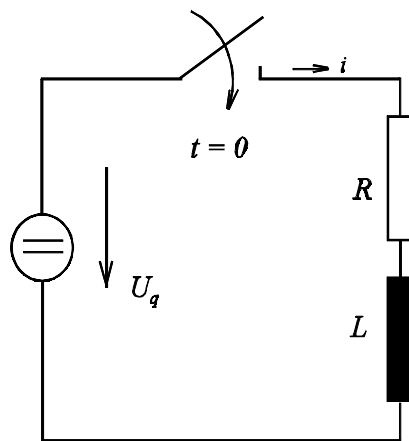
Beispiele für physikalische Ableitungen:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$F = m * \frac{d^2s}{dt^2} = m * \frac{dv}{dt}$$

$$u_L(t) = L * \frac{di_L}{dt}$$

$$i_C(t) = C * \frac{du_C}{dt}$$

Beispiel für das Aufstellen einer Differentialgleichung:

$$u_R = R \cdot i$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Bild MA101A

Maschenumlauf: $U_q = u_R + u_L$

Differentialgleichung: $U_q = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$

Die Kurzform oder Abkürzung des Ausdrucks **Differentialgleichung** ist **DGL**. Der Ausdruck DGL ist schon üblicher als das Wort Differentialgleichung (vergleichbar mit ESB für Ersatzschaltbild).

Beispiel für eine einfache DGL:

$$y = y'$$

Aus der Differentialrechnung ist bekannt:

$$y = e^x \text{ und } y' = e^x$$

Die obere Gleichung erfüllt die obere DGL, weil e^x die Funktion ist, die abgeleitet sich selbst ergibt. Somit ist $y = e^x$ schon die Lösung der DGL $y = y'$. Im allgemeinen gestaltet sich die Lösung einer DGL etwas umfangreicher.

10.2. Klassifizierung und Definitionen

In diesem Abschnitt sollen einige DGL-Begriffe erklärt werden, die in den nächsten Abschnitten benötigt werden. Die Lösungsverfahren, die später vorgestellt werden, unterscheiden sich nach der Struktur der DGL.

10.2.1. Abhängige und unabhängige Variable

Von den normalen Gleichungen her ist schon den Begriff "abhängige und unabhängige Variable" bekannt.

Beispiel: $y = f(x) = 3x^2 + 5x + 7$
 x - unabhängige Variable
 y - abhängige Variable

Im gesamten Kapitel 10 soll meist mit der **unabhängigen Variablen x** und mit der **abhängigen Variablen y** gerechnet werden.

Physikalisch ist die unabhängige Variable meist die Zeit t . Die abhängige Variable ist dann eine physikalische Größe (u, i, v, s).

10.2.2. Ordnung der DGL

Die höchste Ableitung der abhängigen Variablen gibt die Ordnung der DGL an.

Beispiele:	$y' + y = 3$	DGL 1. Ordnung
	$y' + y^2 = 6$	DGL 1. Ordnung
	$y^2 + y^2 = 2$	DGL 1. Ordnung
	$y' + y'' + 3y = 4x$	DGL 2. Ordnung
	$y' + y''^2 + 3y = 4x$	DGL 2. Ordnung
	$y''' + y = 3x$	DGL 3. Ordnung

10.2.3. Lineare und nichtlineare DGL

Linear ist die Differentialgleichung, wenn die abhängige Variable (hier y) und ihre Ableitungen (y', y'', y''' , usw) nur in der Potenz 1 vorkommen und auch nicht miteinander multipliziert werden.

Beispiele:	$y + 10y' = 8$	linear
	$y*x + 3y' = 6$	linear
	$y^2 + y' = 2$	nichtlinear wegen y^2
	$y*y' = 5$	nichtlinear wegen $y*y'$
	$y^2 + 3 = y$	nichtlinear wegen y^2
	$y'*x + y/x = \ln(x)$	linear

$$\ln(y) = 3y + x$$

nichtlinear wegen $\ln(y)$

10.2.4. Homogene und nicht homogene DGL

Die Unterscheidung in homogene und nicht homogene DGLn ist nur für lineare DGLn von besonderem Interesse.

Beispiel für die allgemeine Form einer linearen DGL 1. Ordnung:

$$f(x) \cdot y + g(x) \cdot y' = h(x)$$

Homogen ist die obere Gleichung, wenn der rechte Teil entfällt:

$$h(x) = 0$$

Man bezeichnet auch

$$f(x) \cdot y + g(x) \cdot y' = 0$$

als die homogene DGL der nicht homogenen DGL

$$f(x) \cdot y + g(x) \cdot y' = h(x)$$

Die Aufteilung in homogene und nicht homogene DGL ist bei den Lösungsmethoden für lineare DGLn wichtig. Die **nicht homogene DGL** wird auch **inhomogene DGL** genannt.

10.2.5. Art der Koeffizienten

Beispiel für die allgemeine Form einer linearen DGL 2. Ordnung:

$$f(x) \cdot y + g(x) \cdot y' + h(x) \cdot y'' = k(x)$$

Koeffizienten werden in diesem Falle die Funktionen genannt, mit denen die abhängige Variable und deren Ableitungen multipliziert werden. Für das obere Beispiel sind das die Koeffizienten $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$. $k(x)$ wird der inhomogene Teil (10.2.4.), Störfunktionen oder Anregungsfunktion genannt.

Unterschieden wird in

DGLn mit konstanten Koeffizienten und
DGLn mit nicht konstanten Koeffizienten

Eine DGL hat konstante Koeffizienten, wenn alle Koeffizienten konstant sind, d.h. die Koeffizienten sind nicht von x abhängig.

Die Art der Koeffizienten beeinflusst die Strategie der Lösung (siehe später) von linearen DGLn.

Beispiele:

$$y + y' = \frac{1}{x}$$

DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y + \frac{y''}{x} = 7$$

DGL mit nicht konstanten Koeffizienten

$$x \cdot y + x^3 \cdot y''' = 8x$$

DGL mit nicht konstanten Koeffizienten

$$y + y''' = \sin(x)$$

DGL mit konstanten Koeffizienten

10.2.6. Integrationskonstanten, Anfangs- und Randwerte

Beispiel 1:

Die einfache DGL

$$y = y'$$

hat bekanntlich eine Lösung, die lautet:

$$y = e^x$$

Dieses kann leicht durch Probe nachgewiesen werden. Aber auch die Funktion ($c = 1$ als Sonderfall von oben)

$$y = c \cdot e^x$$

$$y' = c \cdot e^x$$

$$c \cdot e^x = c \cdot e^x$$

mit c als Konstante erfüllt die Bedingungen der DGL.

Die Lösung der DGL ist nicht eindeutig.

Satz: Pro Ordnung der DGL kann eine Konstante frei gewählt werden. Bei einer DGL n . Ordnung ist die Lösung vollständig, wenn n frei wählbare Konstanten vorhanden sind. Bei weniger als n Konstanten ist die Lösung nicht vollständig.

Beispiel 2: Bei einer DGL 3. Ordnung müssen 3 frei wählbare Konstanten vorhanden sein. Sind nur zwei vorhanden ist die Lösung speziell und nicht vollständig.

Beispiel 3: $y'' = y$

Die obere DGL hat die folgenden partikulären Lösungen (durch Probe nachweisbar):

$$y = c_1 \cdot e^x$$

$$y = c_2 \cdot e^{-x}$$

$$y = c_3 \cdot \cosh(x)$$

$$y = c_4 \cdot \sinh(x)$$

Alle oberen Lösungen sind eine spezielle Lösung oder auch partikuläre Lösungen genannt. Nach der oberen These ist die Lösung nur vollständig und nicht partikulär, wenn bei einer DGL 2. Ordnung auch zwei Konstanten vorhanden sind.

Vollständige Lösung: $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$

$$y = c_3 \cdot \cosh(x) + c_4 \cdot \sinh(x)$$

$$y = c_1 \cdot e^x + c_4 \cdot \sinh(x) \quad (\text{ungewöhnlich aber richtig})$$

Die frei wählbaren Konstanten werden auch Integrationskonstanten genannt, weil (wie später gezeigt wird) die Lösung der DGL teilweise durch Integration möglich ist.

Da ein zu berechnender physikalischer Vorgang eindeutig bestimmt ist, sind diese frei wählbaren Konstanten nur

scheinbar frei wählbar, aber physikalisch vorgegeben. Diese Vorgabe ist entweder ein Wert bei $x = 0$ oder bei $t = 0$, also ein **Anfangswert**. Bei DGLn höherer Ordnung entsprechend mehrere Anfangswerte. Eine andere Vorgabe sind **Randwerte**.

Zurück zum Beispiel 3:

Zur Bestimmung von **zwei** Integrationskonstanten sind **zwei** Vorgaben (Anfangs- oder Randwerte) notwendig:

Randwerte:

$$y(x=x_1) = y_1$$

$$y(x=x_2) = y_2$$

Anfangswerte:

$$y(x=x_0) = y_0$$

$$y'(x=x_0) = y_0'$$

Aus oben angegebenen zwei Alternativen lassen sich aus den jeweils zwei Bedingungen mit Hilfe zweier Gleichungen zwei Konstanten bestimmen:

Beispiel für Randwerte:

Die Kettenlinie (Kette an zwei Punkten aufgehängt) ergibt als Lösung eine DGL nach Art des Beispiels 3. Die zwei Punkte der Aufhängung sind die Randwerte. Durch Einsetzen dieser Randwerte in die Lösung der DGL mit den noch zwei frei wählbaren Konstanten ergeben sich zwei Gleichungen zur Bestimmung der zwei frei wählbaren Konstanten.

Beispiel für Anfangswerte:

Auch das Einschalten der Reihenschaltung von R (ohmscher Widerstand), L (Induktivität) und C (Kondensator) ergibt eine ähnliche DGL als nach Beispiel 3. Zum Zeitpunkt des Einschaltens t_0 Anfangswert "0" der R-L-C-Reihenschaltung sind die Energiegrößen von L und C bekannt:

$$W_C = \frac{1}{2} * L * u_{C0}^2 \qquad u_C(t=0) = u_{C0} \qquad \text{1. Anfangswert}$$

$$W_L = \frac{1}{2} * L * i_{L0}^2 \qquad i_0 = 0 = i(t=0) = C \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=0=t_0} = 0 \Rightarrow u_{C0}' = 0 \qquad \text{2. Anfangswert}$$

Bei Anfangswertproblemen (meist $t = 0, x = 0$) werden in der Regel bei einer DGL n. Ordnung die Anfangswerte der (n-1)-ten Ableitungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten verwendet:

$$y(x=x_0=0) = y_0 \qquad \text{0-te Ableitung vorgegeben}$$

$$y'(x=x_0=0) = y_0' \qquad \text{1-te Ableitung vorgegeben}$$

$$y''(x=x_0=0) = y_0'' \qquad \text{2-te Ableitung vorgegeben}$$

...

$$y^{(n-1)'}(x=x_0=0) = y_0^{(n-1)'} \qquad \text{(n-1)-te Ableitung vorgegeben}$$

10.2.7. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

Alle bislang betrachteten DGLn sind gewöhnliche DGLn. Was heißt das nun? **Gewöhnliche DGLn sind DGLn deren abhängige Variable (y) nur von einer unabhängigen Variablen (x) abhängig ist.**

Partielle DGLn sind DGLn deren abhängige Variable von mindestens zwei unabhängigen Variablen abhängig ist.

Im Rahmen des Kap. 10 sollen nur gewöhnliche DGLn behandelt werden.

Das Hauptanwendungsgebiet von gewöhnlichen DGLn sind zeitabhängige Vorgänge (abhängige Variable t) mit konzentrierten Energiespeichern. Die Energiespeicher wären u.a.:

$W = \frac{mv^2}{2}$	Bewegungsenergie	DGL: $v = \frac{ds}{dt}$
$W = \frac{Cu^2}{2}$	Energie einer Kapazität	DGL: $i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt}$
$W = \frac{Li^2}{2}$	Energie einer Induktivität	DGL: $u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$

Das Hauptanwendungsgebiet von partiellen DGLn sind verteilte Energie, z.B. Feldberechnungen (x-y-z Koordinatenrichtungen als unabhängige Variable) und Wellen- Leitungsberechnungen (eine Ortskoordinate und eine Zeitkoordinate als unabhängige Variable).

Beispiele für partielle DGLn:

Potentialgleichung für das elektrische Strömungsfeld (Laplace-Gleichung):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Leitungsgleichung (verlustlos):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

10.2.8. Beispiele Klassifizierung**Beispiel 1:** (a bis h vorführen, i bis n Studenten)

Man klassifiziere die folgenden DGLn nach

- Ordnung,
- linear/nichtlinear

und bei linearen DGLn zusätzlich nach

- homogen/nicht homogen
- konstanten/nicht konstante Koeffizienten

- | | | |
|----|--|--|
| a) | $y' + y = 1$ | lineare DGL, 1. Ordnung, nicht homogen, konstante Koeffizienten |
| b) | $y'' + y^2 = 0$ | nichtlineare DGL 2. Ordnung |
| c) | $y''' + \frac{y}{x} + \frac{y'}{8} = 3x$ | lineare DGL 3. Ordnung, nicht homogen, nicht konstante Koeffizienten |
| d) | $y'' + 3y' - 2y = 0$ | lineare DGL 2. Ordnung, homogen, konstante Koeffizienten |
| e) | $y^2 + y = 0$ | nichtlineare DGL, 1. Ordnung |
| f) | $y'' + \sqrt{y} = 5x$ | nichtlineare DGL, 2. Ordnung |
| g) | $y'' + 3x + y' = 0$ | lineare DGL, 2. Ordnung, nicht homogen, konstante Koeffizienten |
| h) | $y' * y = 3x$ | nichtlineare DGL, 1. Ordnung |
| i) | $y'' + y' = 1$ | |
| j) | $y'' * x + y = 6x$ | |
| k) | $y''' + \frac{y''}{x} = 4x + 6$ | |
| e) | $y' * y'' + y = 5x$ | |
| m) | $(y')^2 + y = 3$ | |
| n) | $\sin(y) + y = 4$ | |

Beispiel 2: (a - d vorführen, e und f Studenten)

Bilden Sie von den folgenden linearen, inhomogenen DGLn die homogene DGL.

- | | | | |
|----|-----------------------------------|----|--|
| a) | $y + y' * x + y'' * x^2 - 4x = 0$ | b) | $3y + 4y' = \sin(x)$ |
| c) | $7x + 3y'' + 4y' + 6y = 0$ | d) | $e^{-3x} + 3x^2 * y + 4x^4 * y' + 3y''' - \sin(x) = 0$ |
| e) | $y'' + 3x + 4 = 4x^2$ | f) | $y' + 3x * y - 6\sin(x) = 0$ |

Ergebnis:

- | | | | |
|----|------------------------------|----|------------------------------------|
| a) | $y + y' * x + y'' * x^2 = 0$ | b) | $3y + 4y' = 0$ |
| c) | $3y'' + 4y' + 6y = 0$ | d) | $3x^2 * y + 4x^4 * y' + 3y''' = 0$ |

10.3. DGL und Kurvenschar

10.3.1. Kurvenschar einer DGL

Die Lösung einer DGL ergibt eine Funktion $y = f(x)$, die sich als Kurve darstellen läßt. Aus Kap. 10.2.6 ist bekannt, daß sich pro Ordnung der DGL eine frei wählbare Konstante ergibt. Aus der nun mehrdeutigen Lösung ergeben sich bei Variation der frei wählbaren Konstanten Kurvenscharen. Dieses ist am besten an Beispielen zu erklären.

Beispiel 1:

$y' = y$ Lösung bekannt: $y = c \cdot e^x$

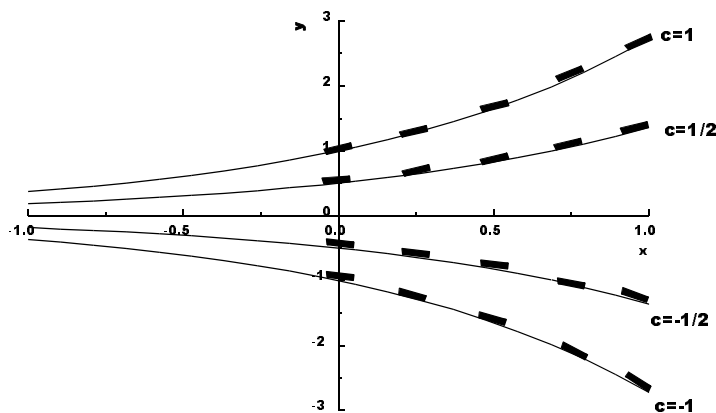


Bild MA1031A

In Bild MA1031A sind die Lösungen dargestellt für

$c = 1$	$y = 1 \cdot e^x$	$y' = 1 \cdot e^x$
$c = 0.5$	$y = 0.5 \cdot e^x$	$y' = 0.5 \cdot e^x$
$c = 0$	$y = 0 \cdot e^x$	$y' = 0 \cdot e^x$
$c = -0.5$	$y = -0.5 \cdot e^x$	$y' = -0.5 \cdot e^x$
$c = -1$	$y = -1 \cdot e^x$	$y' = -1 \cdot e^x$

So entsteht für verschiedene c in der gesamten x - y -Ebene ein Kennlinienfeld. Jede Kurve erfüllt die DGL. In jedem Punkt ist die Steigung gegeben durch:

A] Ableitung der Lösungsfunktion

$$y = c \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot e^x$$

B] Umstellen der DGL nach y' ergibt die Steigung als Funktion von x und y

$$y' = y \quad \Rightarrow \quad y' = f(y)$$

oder allgemein:

$$y' = f(x, y)$$

Im oberen Beispiel 1 wurde erst die Kurve und dann die Steigung eingezeichnet. Bei den nächsten vier Beispielen

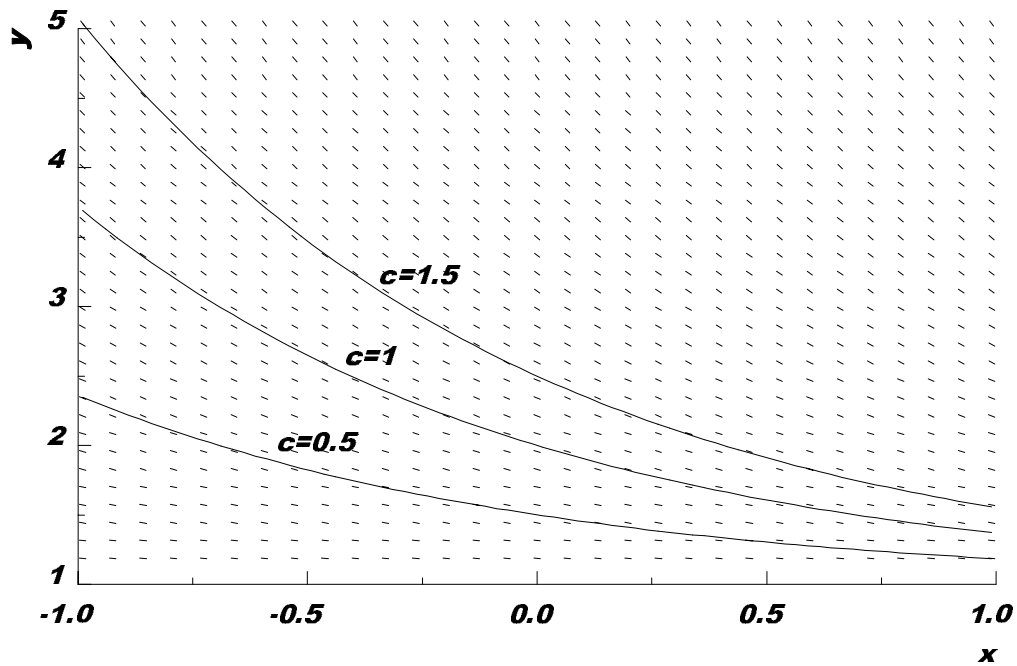
soll umgekehrt vorgegangen werden: Erst die Steigung im gesamten Kennlinienfeld einzeichnen und daraus die Kurvenschar konstruieren.

Beispiele 2 bis 5

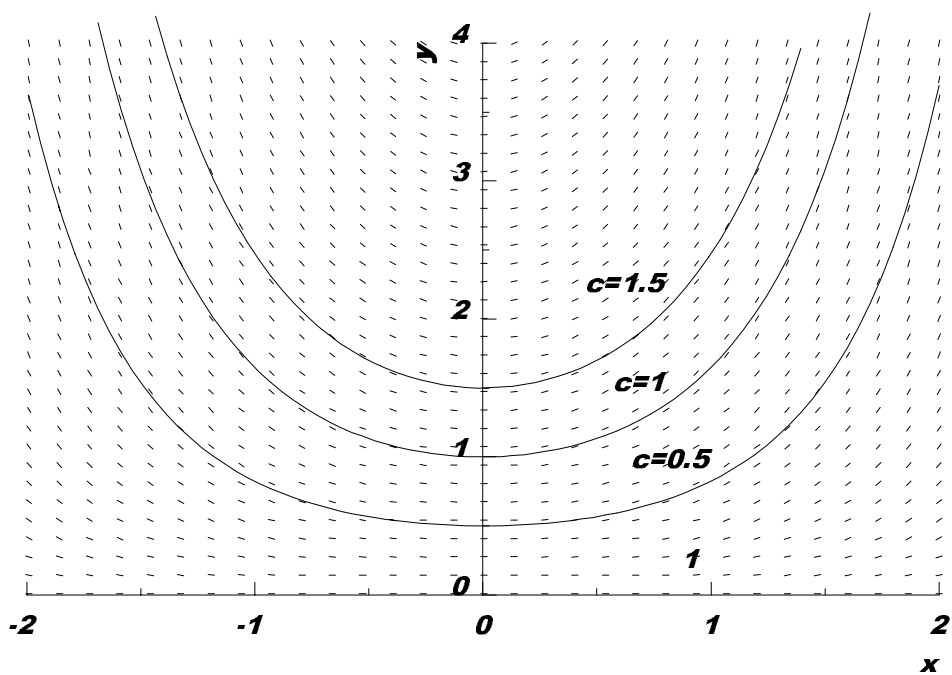
	Beispiel 2	Beispiel 3	Beispiel 4	Beispiel 5
gegebene DGL	$y' + y = 1$	$y' - x*y = 0$	$y' + x*y^2 = 0$	$y'*y = x$
nach y' umgestellte DGL	$y' = 1 - y$	$y' = x*y$	$y' = -x*y^2$	$y' = \frac{x}{y}$
Ergebnis in Bild Arbeitsblatt	MA1031B MAIII-16	MA1031C MAIII-16	MA1031D MAIII-17	MA1031E MAIII-17
analytische Lösung der DGL	$y = c*e^{-x} + 1$	$y = c*e^{\frac{1}{2}x^2}$	$y = \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c}$	$y = \sqrt{x^2 + c}$

Bei den Beispielen 2 bis 5 nach obiger Tabelle wird die gegebene DGL nach y' aufgelöst. Mit Hilfe der Steigung y' werden in der x - y -Ebene an Rasterpunkten die Steigungen eingetragen, siehe Bild MA1031B bis MA1031E (Arbeitsblätter MAIII-16 und MAIII-17). Mit Hilfe dieser Steigungen können bei Vorgabe eines Anfangswertes die Lösungen der DGL konstruiert werden. Die Bestimmung der angegebenen analytischen Lösung wird später beschrieben.

Arbeitsblatt MAIII-16



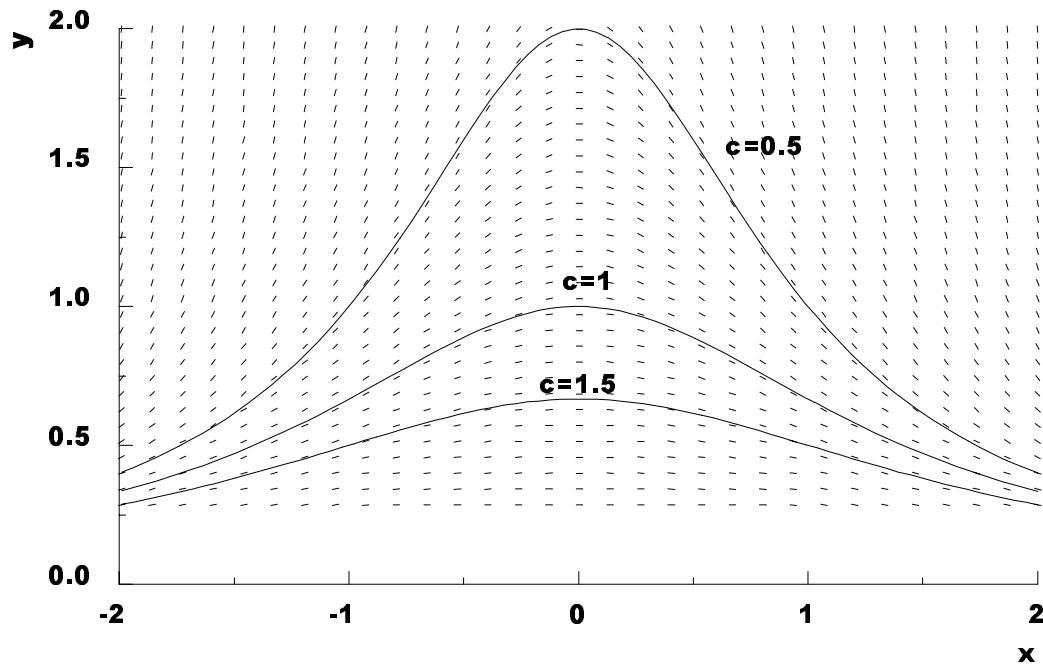
Beispiel 2:

Bild MA1031B: DGL: $y' = 1 - y$ analytische Lösung: $y = c \cdot e^{-x} + 1$ 

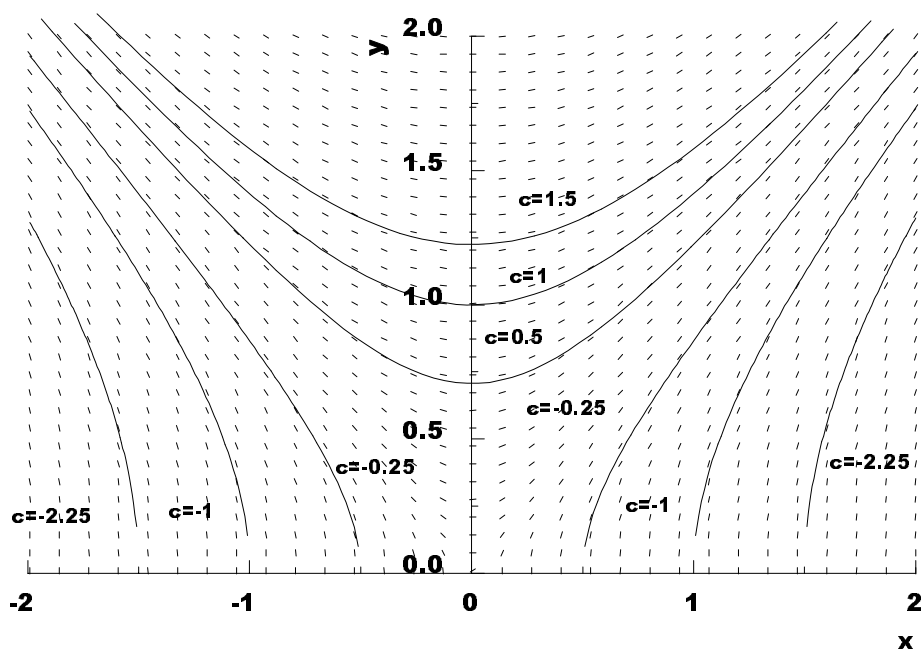
Beispiel 3:

Bild MA1031C: DGL: $y' = x \cdot y$ analytische Lösung: $y = c \cdot e^{x^2/2}$

Arbeitsblatt MAIII-17



Beispiel 4: Bild MA1031D: DGL: $y' = -x \cdot y^2$ analytische Lösung: $y = \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c}$



Beispiel 5: Bild MA1031E: DGL: $y' = x/y$ analytische Lösung: $y = \sqrt{x^2 + c}$

10.3.2. Ableitung der DGL aus einer gegebenen Kurvenschar

Der Normalfall ist, daß eine bestimmte DGL aufgestellt wird oder gegeben ist und diese dann analytisch oder numerisch gelöst werden soll. Hier soll der umgekehrte Fall betrachtet werden, daß aus der Lösung einer DGL (Kennlinienschar) die DGL bestimmt wird. Die Lösung einer DGL n-ter Ordnung enthält n frei wählbare Konstanten, die DGL selbst nicht. Es müssen die Konstanten eliminiert werden.

Satz: Die DGL n. Ordnung einer Kurvenschar erhält man, in dem die frei wählbaren Parameter der Kurvenschar durch n-maliges Differenzieren und Umformen eliminiert werden.

Beispiel 1: DGL der variabel gestauchten/gestreckten Normalparabel

$$y = c \cdot x^2$$

$$y' = c \cdot 2x \qquad c = \frac{y'}{2x}$$

$$y = \frac{y'}{2x} \cdot x^2$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot y' \cdot x$$

Methode hier bei einer DGL 1. Ordnung: $y(x)$ wird einmal differenziert. y und y' enthalten jeweils die Konstante c , die durch Einsetzen oder Gleichsetzen eliminiert werden kann.

Beispiel 2: DGL der in x verschobenen Normalparabel

$$y = x^2 + C$$

$$y' = 2x$$

Methode hier sehr einfach: Durch einmaliges Differenzieren $y(x)$ wird die Konstante schon eliminiert.

Beispiel 3: DGL der in x und y verschobenen Normalparabel

$$y = (x + C_1)^2 + C_2$$

$$y' = 2(x + C_1)$$

$$y'' = 2$$

Methode auch hier sehr einfach: Durch zweimaliges Differenzieren werden die beiden Konstanten eliminiert.

Beispiel 4:**Methode A:**

$$y = \sqrt{x + C_1} + C_2$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x + C_1}}$$

$$y'^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{x + C_1}$$

$$x + C_1 = \frac{1}{4} (y')^{-2}$$

$$1 = \frac{1}{4} (-2)(y')^{-3} y''$$

$$-2(y')^3 = y''$$

Methode B:

$$y = \sqrt{x + C_1} + C_2$$

$$(y - C_2)^2 = x + C_1$$

$$2(y - C_2)y' = 1$$

$$y - C_2 = \frac{1}{2y'}$$

$$y' = -\frac{1}{2} \frac{1}{y'^2} y''$$

$$2y^3 = -y''$$

Methode hier bei einer DGL 2. Ordnung: Die DGL wird jeweils so umgeformt, daß durch zweimaliges Differenzieren die additiven Konstanten eliminiert werden.

Beispiel 5:

DGL der allgemeinen Schwingung der Periode 2π

Methode A:

$$y = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$$

$$y - C_1 \sin(x) = C_2 \cos(x)$$

$$\frac{y - C_1 \sin(x)}{\cos(x)} = C_2$$

$$\frac{\cos(x)[y' - C_1 \cos(x)] - [y - C_1 \sin(x)][-\sin(x)]}{\cos^2(x)} = 0$$

$$\cos(x)y' - C_1 \cos^2(x) + y \sin(x) - C_1 \sin^2(x) = 0$$

$$\cos(x)y' + y \sin(x) = C_1$$

$$-\sin(x)y' + \cos(x)y'' + y \sin(x) + y \cos(x) = 0$$

$$\cos(x)y'' + y \cos(x) = 0$$

$$y'' + y = 0$$

Methode hier bei einer DGL 2. Ordnung: Die DGL wird zweimal so umgeformt, daß auf der rechten jeweils Seite sich die Konstante ergibt. Durch Differenzieren wird dann die Konstante eliminiert. Dieses erfolgt zweimal.

Methode B:

$$y = C_1 * \sin(x) + C_2 * \cos(x)$$

$$y' = C_1 * \cos(x) - C_2 * \sin(x)$$

$$y'' = -C_1 * \sin(x) - C_2 * \cos(x) = -y$$

$$y'' = -y$$

Methode hier: Durch zweimaliges Differenzieren und vergleichen mit der Ausgangsgleichung erhält man die DGL direkt.

Beispiel 6:**Methode A:**

$$y = C * e^{-3x} + 1$$

$$y' = -3C * e^{-3x}$$

$$\frac{y'}{-3} = C * e^{-3x}$$

$$y = \frac{y'}{-3} + 1$$

Methode B:

$$y - 1 = C * e^{-3x}$$

$$\frac{y - 1}{e^{-3x}} = C$$

$$\frac{e^{-3x} * y' - (y - 1)(-3) * e^{-3x}}{(e^{-3x})^2} = 0$$

$$e^{-3x} [y' - (y - 1)(-3)] = 0$$

$$y' + 3y - 3 = 0$$

Anwendung der in diesem Abschnitt erläuterten Methode erfolgt u.a. zur Generierung von Zeitverläufen. Bei der Synthese von Netzwerken muß eine Schaltung entwickelt werden, die die berechnete DGL erfüllt. Die DGL wiederum muß aus der gegebenen Kennlinienschar bestimmt werden.

10.4. Ansatz und Probe

10.4.1. Probe

Hinweis: Die Bestimmung der Lösung von DGLn ist meist aufwendig, bzw. umfangreich. Die Möglichkeit des Einschleichens eines Fehlers ist dabei gegeben. Die Durchführung der Probe ist ratsam.

Zur vollständigen Probe gehören:

A) Überprüfung der DGL n-ter Ordnung

Die ermittelte Lösungsfunktion $y(x)$ wird n mal differenziert. Die so ermittelten Ableitungen werden in die Gleichung der DGL eingesetzt. Diese muß erfüllt sein.

B) Überprüfung der n Anfangs-/Randbedingungen

Die n Anfangs-/Randbedingungen werden in die ermittelten Gleichungen eingesetzt.

Schema der Probe einer DGL n-ter Ordnung:

1. Lösung $y = f(x)$ wird n mal differenziert.
2. $y(x)$ bis $y^{(n)}(x)$ werden in die DGL eingesetzt, dabei muß die Gleichung der DGL erfüllt sein.
3. Die Anfang-/Randbedingungen werden durch Einsetzen in $y(x)$ bis $y^{(n)}(x)$ überprüft.

Beispiel :

DGL: $y''' * y'^2 = 3 * y' * y''^2$
 zu überprüfende Lösung: $y = 4 + 8\sqrt{x-2}$
 Anfangsbedingungen: $y(x=3) = y_0 = 12$
 $y'(x=3) = y_0' = 4$
 $y''(x=3) = y_0'' = -2$

Schritt 1: $y(x)$ wird n mal differenziert

0. Ableitung: $y = 4 + 8\sqrt{x-2} = 4 + 8(x-2)^{+1/2}$
 1. Ableitung: $y' = 4 * (x-2)^{-1/2}$
 2. Ableitung: $y'' = -2 * (x-2)^{-3/2}$
 3. Ableitung: $y''' = 3 * (x-2)^{-5/2}$

Schritt 2 : Einsetzen in DGL $y''' * y'^2 = 3 * y' * y''^2$

$$3 * (x-2)^{-5/2} * 16(x-2)^{-2/2} = 3 * 4(x-2)^{-1/2} * 4 * (x-2)^{-6/2}$$

$$48(x-2)^{-7/2} = 48(x-2)^{-7/2}$$

=> DGL ist erfüllt

Schritt 3: Anfangsbedingungen überprüfen

$$y(x=3) = 4 + 8\sqrt{3-2} = 12 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 12 \quad \text{ist OK}$$

$$y'(x=3) = 4 * (3-2)^{-1/2} = 4 \quad \Rightarrow \quad y_0' = 4 \quad \text{ist OK}$$

$$y''(x=3) = -2 * (3-2)^{-3/2} = -2 \quad \Rightarrow \quad y_0'' = -2 \quad \text{ist OK}$$

Schlußfolgerung: Wenn alle Bedingungen erfüllt sind, dann ist $y = f(x)$ Lösung der DGL mit den gegebenen Anfangsbedingungen.

Aufgabe 10.4.1 a, g, k

Studenten Aufgabe 10.4.1 b, g, j und e

10.4.2. Ansatz einer Lösungsfunktion

Bei bestimmten Typen von DGLn (z.B. lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten, siehe Abschnitt 10.7) kann durch bestimmte Ansätze (deren Regeln später vorgestellt werden) die Lösung von DGLn vorgenommen werden. Dieses Verfahren wird ähnlich durchgeführt wie die im letzten Abschnitt beschriebene Probe.

Schema für das Verfahren “Ansatz der Lösungsfunktion” einer DGL n-ter Ordnung:

1. Schritt: Ansatz $y = f(x)$ mit evtl. noch zu bestimmenden Koeffizienten aufstellen.
2. Schritt: Ansatz $y = f(x)$ wird n mal differenziert.
3. Schritt: $y(x)$ bis $y^{(n)}(x)$ werden in die DGL eingesetzt.
4. Schritt: Die evtl. noch zu bestimmenden Koeffizienten werden aus der Bedingung bestimmt, daß die DGL erfüllt sein muß.

Beispiel :

Gesucht ist die Lösung der folgenden DGL:

$$y' + 4y = 0$$

Bekannt ist die Lösung $y = e^x$ der DGL $y = y'$. Daher erfolgt im **Schritt 1** für die obere DGL ein Ansatz in der Form:

$$y = C_1 * e^{ax}$$

Im **zweiten Schritt** werden n Ableitungen (hier n=1) von $y = f(x)$ gebildet. Hier nur die erste Ableitung, weil eine DGL erster Ordnung vorliegt:

$$y = C_1 * e^{ax} \quad (\text{nullte Ableitung})$$

$$y' = a * C_1 * e^{ax} \quad (\text{erste Ableitung})$$

Im **dritten Schritt** müssen alle Ableitungen (hier nur die erste und die nullte, y ist nullte Ableitung) in die gegebene DGL eingesetzt werden:

$$a * C_1 * e^{ax} + 4 * C_1 * e^{ax} = 0$$

Aus der oberen Gleichung kann im **vierten Schritt** der Koeffizient a bestimmt werden:

$$a = -4$$

Daraus folgt die Lösung mit C_1 als frei wählbare Integrationskonstante und dem Parameter a als festen Wert:

$$y = C_1 * e^{-4x}$$

Aufgabe 10.4.2 a

Studenten: Aufgabe 10.4.2 b

10.5. Analytische Lösung für DGLn 1. Ordnung

Im Abschnitt 10.5 sollen analytische Lösungsmethoden für allgemeine (lineare und nichtlineare) DGLn erster Ordnung entwickelt werden. Im Kap. 10.7 werden dann noch Methoden zur analytischen Lösung linearer DGLn höherer Ordnung vorgestellt.

10.5.1. Trennung der Variablen

Dieses Lösungsverfahren eignet sich für die folgende Form:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Ersetzt man in der oberen DGL

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Die Methode dieses Verfahrens: Die Variablen x und y (auch dx und dy) der obigen Gleichung werden auf je eine Seite separiert. Es erfolgt somit die Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$$

Die obere Gleichung kann integriert werden:

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C$$

$$\text{mit } F_2(y) = \int f_2^{-1}(y) dy \quad \text{und} \quad F_1(x) = \int f_1(x) dx \quad \text{ergibt sich}$$

$$F_2(y) = F_1(x) + C$$

Die obere Gleichung ist die implizite Lösungsform der gegebenen DGL. Um die gewohnte explizite Lösungsform $y = f(x)$ zu erhalten, muß versucht werden, die obere implizite Form nach y aufzulösen. Das Verfahren "Trennung der Variablen" wurde theoretisch aufgezeigt. Einfacher übt sich dieses Verfahren anhand von Beispielen.

Beispiel 1:

gegeben: DGL: $y = 5y'$
 Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 8$

gesucht: $y(x)$

Lösung:

Umformung der DGL: $y = \frac{5dy}{dx}$

Trennung der Variablen: $\frac{5dy}{y} = dx$

Integration: $\int \frac{5dy}{y} = \int dx$

$$5\ln(y) + C = x \qquad C = -\ln(C_1) \quad *)$$

Umformung: $\ln(y) - \ln(C_1) = \frac{x}{5}$

$$\ln\left(\frac{y}{C_1}\right) = \frac{x}{5}$$

Auflösung nach y: $y = C_1 * e^{x/5}$

Anfangsbedingung auswerten: $y(x=0) = C_1 * e^{x/5} \Big|_{x=0} = C_1 * e^0 = C_1 = y_0 = 8 \quad \Rightarrow C_1 = 8$

Ergebnis: $y(x) = 8 * e^{x/5}$

Probe 1, DGL: $y' = \frac{8}{5} * e^{x/5}$

$$y = 5 * y'$$

$$8 * e^{x/5} = 5 * \frac{8}{5} * e^{x/5} \quad \Rightarrow \quad \text{DGL OK}$$

Probe 2, Anfangsbedingung: $y(x) = 8 * e^{x/5}$

$$y(0) = 8 * e^0 = 8 \quad \Rightarrow \quad \text{Anfangsbedingung OK}$$

*) Auf die bei der Integration notwendige Integrationskonstante ist zu achten. Damit die Umformung bei einem Ausdruck $\int dy/y$ einfacher wird, kann die Konstante in der Form “ $-\ln(C)$ ” berücksichtigt werden.

Beispiel 2:

gegeben: DGL: $y^2 = 3x^4 \cdot y'$
 Anfangsbedingung: $y(1) = y_0 = 3$

gesucht: $y(x)$

Lösung:

Umformung: $y^2 = 3x^4 \cdot \frac{dy}{dx}$

Variablentrennung: $\frac{dx}{x^4} = 3 \frac{dy}{y^2}$
 $x^{-4} dx = 3y^{-2} dy$

Integration: $\int x^{-4} dx = \int 3y^{-2} dy$
 $-\frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{3}C = -3 \cdot y^{-1} \quad *)$

Umformung: $\frac{1}{x^3} + C = 9 \frac{1}{y}$

Auflösung nach y: $y = \frac{9}{\frac{1}{x^3} + C} \quad y = 9 \frac{x^3}{Cx^3 + 1}$

Anfangsbedingung auswerten: $y(1) = 9 \frac{1}{C+1} = 3 \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{C+1} \quad C+1 = 3 \quad C = 2$

Ergebnis: $y = 9 \frac{x^3}{2x^3 + 1}$

Probe 1, DGL: $y' = 9 \cdot \frac{(2x^3 + 1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 6x^2}{(2x^3 + 1)^2} = \frac{27x^2}{(2x^3 + 1)^2}$
 $y^2 = 3x^4 \cdot y'$

$$\left[9 \frac{x^3}{(2x^3 + 1)} \right]^2 = 3x^4 \frac{27x^2}{(2x^3 + 1)^2} \quad \Rightarrow \text{DGL OK}$$

Probe 2, Anfangsbedingung: $y(x=1) = 9 \cdot \frac{1^3}{2 \cdot 1^3 + 1} = 3 \quad \Rightarrow \text{OK}$

*) Auch in diesem Falle wird die Konstante der Lösung angepaßt. Es macht keinen Sinn später mit z.B. “-3C” als Konstante zurechnen. Wer dieses nicht gleich sieht, kann eine Konstante durch eine andere ersetzen. Z.B. $C_2 = -3C_1$.

Studenten: Aufgaben 10.5.1 b, 10.5.1 d und 10.5.2 b

10.5.2. Substitution

Hier werden geeignete Ausdrücke (wie auch bei der Integrationsmethode) durch eine Hilfsvariable substituiert. Ziel der Methode ist, die DGL so umzuformen, daß mit Hilfe einer anderen Methode die DGL gelöst werden kann. Hier sollen zwei Arten von Substitutionen untersucht werden.

10.5.2.1. DGLn vom Typ: $y' = f(ax + by + c)$

Substitution: $u = ax + by + C \quad \Rightarrow \quad y' = f(u)$

Differentiation nach x: $u' = a + b \cdot y' \quad u' = \frac{du}{dx}$

Auflösen nach y' : $y' = \frac{u' - a}{b}$

in DGL einsetzen: $\frac{u' - a}{b} = f(u)$

neue DGL in u: $u' = b \cdot f(u) + a \quad \frac{du}{dx} = b \cdot f(u) + a$

Die neue DGL kann in diesem Fall mit Hilfe der Variablentrennung gelöst werden, weil die rechte Seite nur von u abhängig ist.

Beispiel:

DGL: $y' = 3x + 5y + 8$

Substitution: $u = 3x + 5y + 8$

Differenzieren nach x: $u' = 3 + 5y'$

Auflösen nach y' : $y' = \frac{u' - 3}{5}$

in DGL einsetzen: $\frac{u' - 3}{5} = u$

Lösen der DGL u(x) nach der Methode Variablentrennung:

$$u' - 3 = 5u$$

$$\frac{du}{dx} = 5u + 3 = 5 \left(u + \frac{3}{5} \right)$$

$$\ln \left(u + \frac{3}{5} \right) - \ln(C) = 5x$$

$$u + \frac{3}{5} = C e^{5x}$$

$$\frac{du}{u + \frac{3}{5}} = 5 \cdot dx$$

$$\ln \left(\frac{u + \frac{3}{5}}{C} \right) = 5x$$

$$u = C e^{5x} - \frac{3}{5}$$

Rücksubstitution: $u = 3x + 5y + 8 = C e^{5x} - 3/5$

$$5y = C e^{5x} - 3/5 - 8 - 3x$$

Lösung: $y = \frac{C e^{5x} - 3x - 43/5}{5}$

fehlt: Anfangsbedingung, Probe

Studenten: Aufgabe 10.5.3a

10.5.2.2. DGLn vom Typ: $y' = f(y/x)$

Substitution: $u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = f(u)$

Auflösen nach y: $y = u \cdot x$

Differentiation nach x: $y' = u' \cdot x + u \quad u' = \frac{du}{dx}$

Einsetzen in DGL: $u' \cdot x + u = f(u)$

Umformen: $x \frac{du}{dx} = f(u) - u \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$

Die obere DGL kann nun wieder mit Hilfe der Variablentrennung gelöst werden.

Beispiel:

DGL: $y' = \frac{4y + 3x}{x} \quad y' = 4\frac{y}{x} + 3$

Substitution: $u = \frac{y}{x} \quad y = u \cdot x$

Differentiation: $y' = u' \cdot x + u$

Einsetzen in DGL: $u' \cdot x + u = 4u + 3$

Lösen der DGL u(x) nach der Methode Variablentrennung:

$$\frac{du}{dx} \cdot x = 3u + 3 = 3(u + 1)$$

$$\frac{du}{u + 1} = 3 \frac{dx}{x}$$

$$\ln(u + 1) - \ln(c) = 3 \cdot \ln(x) \quad \ln\left(\frac{u + 1}{c}\right) = \ln(x^3)$$

$$u + 1 = c \cdot x^3$$

Rücksubstitution: $\frac{y}{x} + 1 = c \cdot x^3$

$$y = x(cx^3 - 1) = cx^4 - x$$

fehlt: Anfangsbedingung, Probe

Studenten: Aufgabe 10.5.3e

10.5.3. Lineare DGLn 1. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten (Variation der Konstanten)

Die allgemeine Form der linearen DGL 1. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten lautet:

$$f_1(x) \cdot y' + f_2(x) \cdot y = f_3(x)$$

Durch Division von $f_1(x)$ ergibt sich :

$$y' + \frac{f_2(x)}{f_1(x)} y = \frac{f_3(x)}{f_1(x)}$$

oder umgeformt:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Die obere DGL soll nun gelöst werden. Zunächst wird die homogene DGL durch Trennung der Variablen gelöst:

$$y_h' + f(x) \cdot y_h = 0$$

$$\frac{dy_h}{dx} = -f(x) y_h$$

$$\frac{dy_h}{y_h} = -f(x) dx$$

$$\ln(y_h/c) = -\int f(x) dx$$

$$y_h = c \cdot \exp[-\int f(x) dx]$$

Somit wurde eine homogene Lösung gefunden. Jetzt der Trick. Diesen findet man in der Mathematik nicht so oft. Die Konstante c wird als Funktion von x angenommen: $c = \varphi(x)$. Daher der Titel **Variation der Konstanten**. Die Abhängigkeit $\varphi(x)$ soll durch Einsetzen in die inhomogene DGL bestimmt werden:

$$y = \varphi(x) \cdot \exp[-\int f(x) dx]$$

$$\frac{d}{dx} \left[-\int f(x) dx \right] = -f(x)$$

$$y' = \varphi'(x) \cdot \exp[-\int f(x) dx] + \varphi(x) \cdot \exp[-\int f(x) dx] \cdot [-f(x)]$$

Eingesetzt in die DGL

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

ergibt sich durch Umformung und Variablentrennung:

$$\varphi'(x) \cdot \exp[-\int f(x) dx] - \varphi(x) \cdot f(x) \cdot \exp[-\int f(x) dx] + f(x) \cdot \varphi(x) \cdot \exp[-\int f(x) dx] = g(x)$$

$$\varphi'(x) \cdot \exp[-\int f(x) dx] = g(x)$$

$$\varphi'(x) = g(x) \cdot \exp[+\int f(x) dx] = d\varphi/dx$$

$$d\varphi = g(x) \cdot \exp[+\int f(x) dx]$$

Die obere Gleichung wird integriert:

$$\varphi(x) = \int g(x) \cdot \exp[+\int f(x) dx] dx + c$$

Der Ansatz mit $\varphi(x)$ ist erfüllt wenn $\varphi(x)$ nach obiger Gleichung gewählt wird. Eingesetzt ergibt sich:

$$y = \varphi(x) \cdot \exp[-\int f(x) dx]$$

$$y = [c + \int g(x) \cdot \exp\{\int f(x) dx\} dx] \cdot \exp[-\int f(x) dx]$$

Mit

$$F(x) = \int f(x) dx$$

vereinfacht sich die obere Lösungsformel zu:

$$y(x) = [c + \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx] \cdot e^{-F(x)}$$

Die Lösungsmethode Variation der Konstanten kann mit zwei verschiedenen Strategien durchgeführt werden.

- Einsetzen in die obere Formel
- Die Variation der Konstanten selbst durchführen.

Beide Methoden sollen in den nächsten zwei Beispielen vorgestellt werden. Die Benutzung der oberen Formel gibt ein leicht anzuwendendes Schema.

Schema: Variation der Konstanten
1. Allgemeine lineare DGL 1. Ordnung umformen zu der Form: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$
2. Integral bilden: $F(x) = \int f(x) \cdot dx \quad (\text{ohne } c)$
3. Lösungsformel: $y(x) = [c + \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx] \cdot e^{-F(x)}$
4. Anfangsbedingung auswerten: $y_0(x=x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad c$
5. Probe durch Einsetzen in die DGL

Beispiel 1: (nach Schema)

gegeben: $x \cdot y' + y - x \cdot \cos(x) = 0$ $y(1) = 0$

1. allgemeine Form:

$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \cos(x)$$

2. Integral bilden:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

3. Lösungsformel:

$$y(x) = [c + \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx] \cdot e^{-F(x)} = [c + \int \cos(x) \cdot e^{\ln(x)} dx] \cdot e^{-\ln(x)}$$

$$y(x) = [c + \int \cos(x) \cdot x \cdot dx/x]$$

Tabelle: $\int x \cdot \cos(x) dx = \cos(x) + x \cdot \sin(x)$

$$y(x) = [c + \cos(x) + x \cdot \sin(x)]/x$$

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{\cos(x)}{x} + \sin(x)$$

4. Anfangsbedingung auswerten:

$$y(1) = 0 = \frac{c}{1} + \frac{\cos(1)}{1} + \sin(1) \quad c = -\cos(1) - \sin(1)$$

$$y(x) = -\frac{\cos(1) + \sin(1)}{x} + \frac{\cos(x)}{x} + \sin(x)$$

5. Probe:

$$y' = \frac{\cos(1) + \sin(1)}{x^2} + \frac{-x \cdot \sin(x) - \cos(x)}{x^2} + \cos(x)$$

$$x \cdot y' + y - x \cdot \cos(x) = 0$$

$$x \cdot \frac{\cos(1) + \sin(1) - x \cdot \sin(x) - \cos(x) + x^2 \cos(x)}{x^2} + \frac{-\cos(1) - \sin(1)}{x} + \frac{\cos(x)}{x} + \sin(x) - x \cdot \cos(x) = 0$$

$$\frac{\cos(x) + \sin(1) - x \cdot \sin(x) - \cos(x) + x^2 \cos(x) - \cos(1) - \sin(1) + \cos(x) + x \cdot \sin(x) - x^2 \cos(x)}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{DGL OK}$$

$$y(x=1) = \frac{-\cos(1) - \sin(1)}{1} + \frac{\cos(1)}{1} + \sin(1) = 0 \quad \Rightarrow \text{Anfangsbedingung OK}$$

Beispiel 2: (nach Methode V.d. K.)

gegeben: $y' + 4y = x \cdot e^{-5x}$ $y(x=0) = y_0 = 3$

1. homogene DGL: $\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

$$\frac{dy}{y} = -4dx$$

$$\ln(y/c) = -4x$$

$$y = c \cdot e^{-4x}$$

2. Variation von c: $y = \varphi(x) \cdot e^{-4x}$

$$y' = \varphi'(x) \cdot e^{-4x} + \varphi(x) \cdot (-4) \cdot e^{-4x} = \varphi'(x) \cdot e^{-4x} - 4 \cdot \varphi(x) \cdot e^{-4x}$$

3. Einsetzen in die DGL: $y' + 4y = x \cdot e^{-5x}$

$$\varphi'(x) \cdot e^{-4x} - 4 \cdot \varphi(x) \cdot e^{-4x} + 4 \cdot \varphi(x) \cdot e^{-4x} = x \cdot e^{-5x}$$

$$\varphi'(x) \cdot e^{-4x} = x \cdot e^{-5x}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = x \cdot e^{-5x} \cdot e^{4x} = x \cdot e^{-x}$$

$$\varphi(x) = \int x \cdot e^{-x} dx$$

Tabelle: $\int x \cdot e^{-x} = -e^{-x}(x + 1)$

$$\varphi(x) = -e^{-x}(x+1) + C$$

4. $\varphi(x)$ Einsetzen: $y = \varphi(x) \cdot e^{-4x}$

$$y = [-e^{-x}(x+1) + C] \cdot e^{-4x}$$

$$y = C \cdot e^{-4x} - e^{-5x}(x+1)$$

5. Anfangsbedingung auswerten: $y_0 = 3 = y(x=0) = C \cdot e^0 - e^0(0 + 1) = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 4$

$$y = 4 \cdot e^{-4x} - e^{-5x}(x + 1)$$

6. Probe: $y' = -16 \cdot e^{-4x} - e^{-5x}[1 - 5x - 5] = -16 \cdot e^{-4x} + 4e^{-5x} + 5x \cdot e^{-5x}$

$$y' + 4y = x \cdot e^{-5x}$$

$$-16 \cdot e^{-4x} + 4e^{-5x} + 5x \cdot e^{-5x} + 4[4 \cdot e^{-4x} - e^{-5x}(x + 1)] = x \cdot e^{-5x}$$

$$-16 \cdot e^{-4x} + 4e^{-5x} + 5x \cdot e^{-5x} + 16 \cdot e^{-4x} - 4x \cdot e^{-5x} - 4e^{-5x} = x \cdot e^{-4x} \quad \Rightarrow \text{DGL OK}$$

$$y(x=0) = 4 \cdot e^0 - e^0(0 + 1) = 3 \quad \Rightarrow \text{OK}$$

Studenten: Aufgabe 10.5.4a und 10.5.5c

10.5.4. Das totale Differential

Bildet man von der impliziten Gleichung (keine DGL)

$$F(x,y) = C \tag{10.5.4.1}$$

das totale Differential (siehe Kap. 6.10, zweites Semester), so ergibt sich durch Umformung:

$$F_x(x,y)*dx + F_y(x,y)*dy = 0$$

$$F_x(x,y) + F_y(x,y)*dy/dx = 0$$

$$F_x(x,y) + F_y(x,y)*y' = 0 \tag{10.5.4.2}$$

mit $A(x, y) = F_x(x,y)$ und $B(x, y) = F_y(x,y)$ (10.5.4.3) (10.5.4.4)

eine DGL 1. Ordnung:

$$A(x,y) + B(x,y) * y' = 0 \tag{10.5.4.5}$$

Das Bilden des totalen Differentials einer impliziten Funktion ist immer möglich. Zu jeder impliziten Funktion (10.5.4.1) gibt es somit eine zugehörige DGL (10.5.4.5). Hier soll nun versucht werden, aus einer gegebenen DGL (10.5.4.5) die implizite Funktion (10.5.4.1), also die Lösung der DGL, zu bestimmen.

Wie wird aus F_x bzw F_y die implizite Funktion $F(x, y)$ bestimmt? Antwort: durch Integration. Welche der beiden Funktionen F_x bzw F_y muß integriert werden? Antwort: beide. Es ergeben sich zwei Lösungen:

$$F = F_1 = \int F_x dx + f_1(y) \tag{10.5.4.6}$$

$$F = F_2 = \int F_y dy + f_2(x) \tag{10.5.4.7}$$

Bei der Integration ergibt sich eine additive Konstante, die nicht von der Integrationsvariablen abhängig sein darf. In den oberen zwei Gleichungen erscheint diese Integrationskonstante als Funktion der jeweils anderen Variablen x oder y . Weiterer Beweis für die Addition von f_1 und f_2 : Beim Differenzieren der oberen beiden Gleichungen fallen die Funktionen $f_1(y)$ und $f_2(x)$ weg. Diese Lösungsmethode führt nur zum Ziel, wenn F_1 und F_2 das gleiche Ergebnis liefert:

$$F = F_1 = F_2$$

$$\int F_x dx + f_1(y) = \int F_y dy + f_2(x)$$

Ersetzen von F_x und F_y in der oberen Gleichung durch (10.5.4.3) und (10.5.4.4) ergibt:

$$\int A*dx + f_1(y) = \int B*dy + f_2(x)$$

Die obere Gleichung wird nacheinander nach x und dann nach y differenziert:

$$A = \int B_x*dy + d\{f_2(x)\}/dx \qquad A_y = B_x \tag{10.5.4.8}$$

obere Gleichung ist die Bedingung dafür, daß auf die DGL (10.5.4.5) die Lösungsmethode ‘‘Totales Differential’’ anwendbar ist.

Zusammenfassung:	T O T A L E S D I F F E R E N T I A L	
gesucht:	$F(x,y) = C$	(10.5.4.1)
gegebene DGL:	$A(x,y) + B(x,y) * y' = 0$	(10.5.4.5)
Bedingung:	$A_y = B_x$	(10.5.4.8)

F-Bestimmung:	$F = F_1 = \int A dx + f_1(y)$ $F = F_2 = \int B dy + f_2(x)$	(10.5.4.6) (10.5.4.7)
danach $F(x, y)$ (10.5.4.1), wenn möglich nach y auflösen		

Beispiel 1:

gegeben: DGL: $(1 + 2x*y) + (1 + x^2)*y' = 0$

A, B-Bestimmung: $A = 1 + 2xy$

$$B = 1 + x^2$$

lösbar? $A_y = B_x$?

$$A_y = 2x$$

$$B_x = 2x$$

$$A_y = B_x \quad \Rightarrow \text{lösbar}$$

$$F_1 = \int A dx = \int (1 + 2xy) dx = x + x^2 y + f(y)$$

$$F_2 = \int B dy = \int (1 + x^2) dy = y + yx^2 + f(x)$$

Umordnen: $F_1 = x + x^2 y + f(y)$

$$F_2 = f(x) + x^2 y + y$$

Durch Vergleich läßt sich ablesen:

$$f(y) = y \quad \text{und} \quad f(x) = x$$

Damit ergibt sich die Lösung der DGL:

$$F(x,y) = x + x^2*y + y = C$$

Auflösen nach y : $(x^2 + 1)y = C - x$

$$y = \frac{C - x}{x^2 + 1}$$

fehlt: Anfangsbedingung und Probe

Beispiel 2:

gegeben: DGL: $(y^2 + x^2)x + x^2*y^4*y' = 0$

A, B-Bestimmung: $A = y^2*x + x^2$

$$B = x^2*y^4$$

lösbar? $A_y = B_x$?

$$A_y = 2yx$$

$$B_x = 2xy^4$$

$$A_y \neq B_x \quad \Rightarrow \text{nicht lösbar}$$

Beispiel 3:

gegeben:	DGL: $3x^2 + 5x^4y + 4y^3y' + x^5y' = 0$
Umformung:	$(3x^2 + 5x^4y) + (4y^3 + x^5)y' = 0$
A, B-Bestimmung:	$A = 3x^2 + 5x^4y$ $B = 4y^3 + x^5$
lösbar?	$A_y = B_x ?$ $A_y = 5x^4$ $B_x = 5x^4$ $A_y = B_x \quad \Rightarrow \text{lösbar}$
Integration:	$F_1 = \int A dx = \int (3x^2 + 5x^4y) dx = x^3 + x^5y + f(y)$ $F_2 = \int B dy = \int (4y^3 + x^5) dy = y^4 + x^5y + f(x)$
Umordnung:	$F_1 = x^3 + x^5y + f(y)$ $F_2 = f(x) + x^5y + y^4$
Vergleich:	$f(x) = x^3 \quad \text{und} \quad f(y) = y^4$
implizite Lösung:	$F = x^3 + x^5y + y^4 = C$
explizite Lösung:	Auflösung nach $y = f(x)$ ist hier nicht möglich.

10.5.5. Integrierender Faktor

Die Methode des integrierenden Faktors basiert auch auf der Methode des totalen Differentials. Wird die auszuwertende DGL des totalen Differentials.

$$A(x,y) + B(x,y) \cdot y' = 0 \quad (10.5.4.5)$$

multipliziert mit einer Funktion, die von x und y abhängig ist

$\mu(x, y)$ - integrierender Faktor

ergibt sich eine ähnliche DGL als (10.5.4.5):

$$A(x,y) \cdot \mu(x,y) + B(x,y) \cdot \mu(x,y) \cdot y' = 0 \quad (10.5.5.1)$$

Mit:

$$A^*(x, y) = A(x,y) \cdot \mu(x,y) \quad (10.5.5.2)$$

$$B^*(x, y) = B(x,y) \cdot \mu(x,y) \quad (10.5.5.3)$$

ergibt sich die gleiche Form der DGL als beim totalen Differential:

$$A^*(x, y) + B^*(x, y) \cdot y' = 0 \quad (10.5.5.4)$$

Die obere DGL kann mit den Methoden des totalen Differentials (siehe Kap. 10.5.4) gelöst werden. Das Problem ist, den integrierenden Faktor zu bestimmen. Im Beispiel 1 wird bei Vorgabe des integrierenden Faktors die Methode vorgestellt. Die Bestimmung des integrierenden Faktors wird anschließend kurz erläutert. Der Praktiker arbeitet mit einem daraus sich ergebenden Schema für verschiedene Ansätze des integrierenden Faktors.

Dieses Schema wird vorgestellt. Abschließend wird das Beispiel 2 anhand des gegebenen Schemas gelöst.

Beispiel 1: (nach Methode totales Differential)

gegeben: DGL: $(3x - 2y) - x \cdot y' = 0$

A, B-Bestimmung: $A = 3x - 2y$

$$B = -x$$

lösbar? $A_y = B_x ?$

$$A_y = -2$$

$$B_x = -1$$

$$A_y \neq B_x \quad \Rightarrow \text{Methode totales Differential nicht möglich.}$$

Ausweg: obere DGL mit $\mu(x, y) = x$ multiplizieren (Ableitung später)

mit x multiplizierte DGL: $(3x^2 - 2yx)dx - x^2dy = 0$

A, B-Bestimmung: $A^* = 3x^2 - 2yx$

$$B^* = -x^2$$

lösbar? $A_y^* = B_x^* ?$

$$A_y^* = -2x$$

$$B_x^* = -2x$$

$$A_y^* = B_x^* \quad \Rightarrow \text{Methode totales Differential anwendbar}$$

Integration: $F_1 = \int A^* dx = \int (3x^2 - 2yx)dx = x^3 - yx^2 + f_1(y)$

$$F_2 = \int B^* dy = \int (-x^2)dy = -x^2y + f_2(x)$$

Umordnung: $F_1 = x^3 - y \cdot x^2 + f_1(y)$

$$F_2 = f_2(x) - y \cdot x^2 + 0$$

Lösung: $f_1(y) = 0$ und $f_2(x) = x^3$

$$F(x, y) = x^3 - y \cdot x^2 = C$$

$$y = \frac{-C + x^3}{x^2} \qquad Y = \frac{-C}{x^2} + x$$

fehlt noch: Anfangsbedingungen auswerten und Probe

Fazit: Mit dem Integrierenden Faktor (Multiplikation der DGL, hier mit x) läßt sich die DGL mit Hilfe der totalen DGL lösen.

Wenn die Methode "Totales Differential" und der integrierender Faktor bekannt ist, gestaltet sich die Lösung der DGL nicht sehr schwierig. Ist der integrierende Faktor nur von einer Variablen (wie beim letzten Beispiel 1 von x) abhängig, kann die Funktion $\mu(x)$ bestimmt werden. Auf die Ausdrücke

$$A^*(x, y) = \mu(x) \cdot A(x, y)$$

$$B^*(x, y) = \mu(x) \cdot B(x, y)$$

werden die Lösbarkeitsbedingungen angewendet:

$$A_y^* = \mu(x) * A_y(x, y)$$

$$B_x^* = \frac{d\mu}{dx} * B(x, y) + \mu(x) * B_x(x, y)$$

$$A_y^* = B_x^*$$

$$\mu * A_y = \frac{d\mu}{dx} B + \mu * B_x$$

Die obere DGL für μ wird mit der Methode "Trennung der Variablen" gelöst

$$\frac{d\mu}{dx} * B = \mu * A_y - \mu * B_x$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{A_y - B_x}{B} * dx$$

$$\ln(\mu) = \int \frac{A_y - B_x}{B} * dx$$

$$\mu = \exp\left[\int \frac{A_y - B_x}{B} dx\right]$$

Schema (ohne Herleitung) für die Wahl des Integrierenden Faktors $\mu(x,y)$ für die DGL:

$$\mathbf{A(x,y) + B(x,y)*y' = 0}$$

- **Der integrierender Faktor enthält nur x:**

$$\mu = \exp\left[-\int \frac{1}{B}(B_x - A_y) dx\right] \quad (\text{Herleitung siehe oben})$$

- **Der integrierender Faktor enthält nur y:**

$$\mu = \exp\left[\int \frac{1}{A}(B_x - A_y) dy\right]$$

- **Der integrierender Faktor enthält nur xy:**

$$\mu = \exp\left[\int \frac{1}{x*A - y*B}(B_x - A_y) dz\right] \quad z = x*y$$

- **Der integrierender Faktor enthält nur y/x:**

$$\mu = \exp\left[\int \frac{x^2}{x*A + y*B}(B_x - A_y) dz\right] \quad z = \frac{y}{x}$$

- **Der integrierender Faktor enthält nur $x^2 + y^2$:**

$$\mu = \exp\left[\int \frac{1}{2(y*A - x*B)}(B_x - A_y) dz\right] \quad z = x^2 + y^2$$

Beispiel 2:

gegeben: DGL: $(2x \cdot y^3 + 6x^5 \cdot y) + (5x^2 \cdot y^2 + 3x^6)y' = 0$

Hinweis: integrierender Faktor enthält nur y

A, B-Bestimmung:

$$A = 2x \cdot y^3 + 6x^5 y$$

$$B = 5x^2 \cdot y^2 + 3x^6$$

$$A_y = 6xy^2 + 6x^5$$

$$B_x = 10xy^2 + 18x^5$$

Schema:

$$my = \exp\left[\int \frac{1}{A}(B_x - A_y)dy\right]$$

$$B_x - A_y = 4xy^2 - 12x^5$$

$$\mu = \exp\left[\int \frac{1}{2xy^3 + 6x^5y}(4xy^2 + 12x^5)dy\right]$$

$$my = \exp\left[\int \frac{2}{y}dy\right] = \exp[2\ln(y)] = \exp[\ln(y^2)] = y^2$$

multiplizierte DGL: $(2xy^5 + 6x^5y^3)dx + (5x^2y^4 + 3x^6y^2)dy = 0$

A*, B*-Bestimmung:

$$A^* = A \cdot \mu = 2xy^5 + 6x^5y^3$$

$$B^* = B \cdot \mu = 5x^2y^4 + 3x^6y^2$$

Integration:

$$F = \int A^* dx = \int (2xy^5 + 6x^5y^3)dx = xy^5 + x^6y^3 + f_1(y)$$

$$F = \int B^* dy = \int (5x^2y^4 + 3x^6y^2)dy = xy^5 + xy^3 + f_2(x)$$

mit $f(y) = 0 = f(x)$ ergibt sich die Lösung

$$F = xy^5 + x^6y^3 = C$$

fehlt noch: Anfangsbedingung auswerten und Probe

Kommentar: Diese Methode erfordert sehr viel Probieren und führt meistens nicht zum Ziel.

10.6. Das Aufstellen von DGLn

Bislang ist schon viel Theorie über DGLn erläutert worden. Die große Motivation diese zu lösen aber fehlt noch, weil noch nicht klar ist, wo überall diese DGLn auftreten und woher man DGLn erhält. In der Praxis ist es nicht so wie bei einer Mathematik-Aufgabe, wo die DGL mit Anfangsbedingung(en) gegeben ist. Beides (DGLn, wie auch die Anfangsbedingungen) erhält man aus physikalischen Gleichungen und Erkenntnissen. In den meisten Fällen ergibt sich die DGL nicht direkt, sondern mehrere Gleichungen müssen umgeformt und eingesetzt werden. Eine DGL erhält man immer dann, wenn der Zusammenhang zwischen zwei physikalischen Größen über eine Differentiation erfolgt. Dazu sollen jeweils zwei Beispiele aus der Elektrotechnik und der Mechanik vorgestellt werden.

Beispiel 1: (Einschalten eines ungeladenen Kondensators)

Aufgabenstellung:

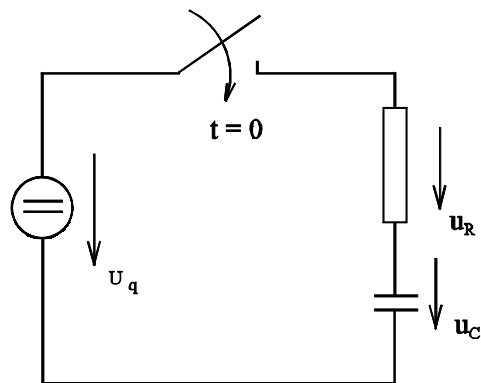


Bild MA106A

Aufstellen der physikalischen Gleichungen:

Maschenumlauf: $u_q = u_R + u_c$

Zusammenhang Strom und Spannung am Kondensator: $i = C \frac{du_c}{dt}$

Zusammenhang Strom und Spannung am Widerstand: $u_R = R \cdot i$

Umformung der physikalischen Gleichungen zu einer DGL:

$$u_R = R \cdot i = R \cdot C \frac{du_c}{dt}$$

$$\text{DGL: } U_q = R \cdot C \frac{du_c}{dt} + u_c$$

Es ergibt sich eine DGL, wobei u_c die abhängige Variable ist und t die unabhängige Variable.

Bestimmung der Anfangsbedingung:

Für die obere DGL 1. Ordnung wird zur Bestimmung der Lösung eine Anfangsbedingung benötigt. Diese erhält man aus der Bedingung, daß sich die Kondensator-Spannung u_c aus energetischen Gründen nicht sprunghaft verändern kann:

$$u_c(t=0) = u_{c0} = 0$$

Aus dem Beispiel 1 folgt, daß bei einem physikalischen Problem, bei dem eine DGL vorkommt, die folgenden Schritte erfolgen:

1. Aufstellen der physikalischen Gleichungen
2. Umformung der physikalischen Gleichungen zu einer DGL
3. Bestimmung der Anfangsbedingung(en)
4. Lösen der DGL
5. Probe

Im Rahmen dieser Vorlesung werden überwiegend nur die Punkte 4 und 5 bei gegebener DGL und gegebenen Anfangsbedingungen behandelt.

Beispiel 2: (Einschalten R, L, C)

Aufgabenstellung:

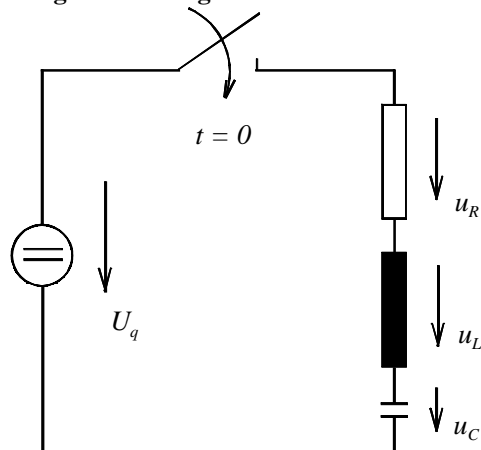


Bild MA106B

Aufstellen der physikalischen Gleichungen:

Maschenumlauf: $U_q = u_R + u_L + u_C$

Zusammenhang Strom und Spannung am Kondensator: $i = C \frac{du_C}{dt}$

Zusammenhang Strom und Spannung am Widerstand: $u_R = R \cdot i$

Zusammenhang Strom und Spannung an der Induktivität: $u_L = L \frac{di}{dt}$

Umformung der physikalischen Gleichungen zu einer DGL:

Die Spannungen u_R und u_L werden in die Maschengleichung eingesetzt:

$$U_q = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + u_C$$

Zur Berücksichtigung der Spannung u_C wird die obere Gleichung einmal differenziert:

$$R \cdot \frac{di}{dt} + L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

Mit

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

ergibt sich eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die abhängige Variable i und die unabhängige Variable t :

$$R \cdot \frac{di}{dt} + L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0$$

Bestimmung der Anfangsbedingung:

Für eine DGL 2. Ordnung werden 2 Anfangsbedingungen benötigt. Aus energetischen Gründen ergibt sich, daß der Strom in einer Induktivität sich nicht sprungförmig ändert:

$$i(t=0) = i_0 = 0$$

Ist zum Einschaltzeitpunkt der Strom $i(t=0) = i_0 = 0$, fällt am Widerstand keine Spannung ab $u_R(t=0)$. Auch die Spannung am entladenen Kondensator $u_C(t=0)$ ist Null, weil sich aus energetischen Gründen die Spannung am Kondensator nicht sprungförmig ändern kann. Damit fällt zum Einschaltzeitpunkt die Spannung U_q am der Induktivität ab

$$U_q = u_L(t=0) = L \cdot \frac{di(t=0)}{dt} = L \cdot i_0'$$

Aus der oberen Gleichung folgt die zweite Anfangsbedingung:

$$i_0' = \frac{U_q}{L}$$

Zusammenfassung aus Beispiel 1 und 2:

- Ein lineares Netzwerk mit n Energiespeichern (Energiespeicher ist L und C) ergibt ein DGL System mit n DGLn, 1. Ordnung.
- Dieses DGL-System kann zu einer linearen DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten umgeformt werden.

Lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten sind analytisch lösbar (im Gegensatz zu den meisten nichtlinearen DGLn). Da die linearen DGLn (lineare Netzwerke mit L und C) in der E-Technik eine große Rolle spielen, sollen die linearen DGLn und deren Umformung in den Abschnitten 10.7 und 10.8 ausführlich behandelt werden.

Eine andere wichtige Eigenschaft von DGLn, die aus Beispiel 2 zu erkennen ist: n verkoppelte DGLn erster Ordnung lassen sich umformen zu einer DGL n -ter Ordnung. Dieses gilt auch für nichtlineare DGLn (ohne Beweis hier). Auch die umgekehrte Richtung ist möglich: Eine DGL n -ter Ordnung läßt sich in n DGLn erster Ordnung umformen (ohne Beweis hier). Die letzte Umformung benötigt man zur numerische Lösung von DGLn (siehe Kap. 10.9).

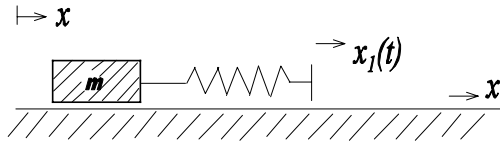
Beispiel 3: (Feder-Masse-System)**Aufgabenstellung:****gegeben:** $x_1(t)$ 

Bild MA106C

Federkraft: $f_F = c[x - x_1(t) + a] = c*[x - x_0(t)]$

Reibungskraft: $f_R = d*v = d*\dot{x}$

Massenbeschleunigung: $f_m = m*\ddot{x}$

Kraftsumme: $f_R + f_F + f_m = 0$

Umformen der physikalischen Gleichungen zu einer DGL:

Einsetzen der oberen drei Kräftesummen ergibt eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Lösung später):

$$c*x + d*\dot{x} + m*\ddot{x} = c*x_0(t)$$

Bestimmung der Anfangsbedingungen:

Die Geschwindigkeit kann sich nicht sprunghaft ändern, weil die Beschleunigung (Kraft) nicht unendlich werden kann:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad F = m*a$$

Auch die Position kann sich nicht sprunghaft ändern. Daraus ergeben sich die zwei Anfangsbedingungen:

$$x(t=0) = x_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad v_0 = v(t=0) = \dot{x}_0$$

Beispiel 4:
Aufgabenstellung:

(Pendel DGL)

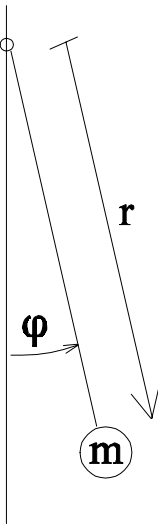
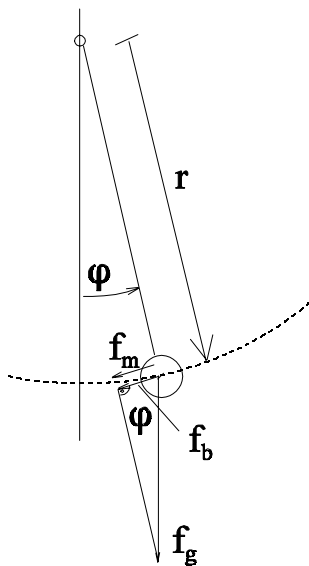


Bild MA106D

Aufstellung der physikalischen Gleichungen:



f_g - Gravitationskraft

f_b - Beschleunigungskraft

f_m - Massenträgheitskraft

Kraftsumme: $f_m + f_b = 0$

Zerlegung der Kraft f_g : $f_b = f_g \cdot \sin(\varphi)$

Massenträgheitskraft: $f_m = m \cdot \ddot{s} = m \frac{d^2(r \cdot \varphi)}{dt^2} = m \cdot r \cdot \ddot{\varphi}$

Gravitationskraft: $f_g = m \cdot g$

Bild MA106E

Umformen der physikalischen Gleichung zu der DGL:

$$f_b = f_g \cdot \sin(\varphi) = m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

$$f_m + f_b = 0$$

$$m \cdot r \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot \sin(\varphi) = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \cdot \sin(\varphi) = 0$$

Obere Gleichung ist die nichtlineare Pendel-DGL 2. Ordnung. Die Lösung ist möglich durch:

- Linearisierung => mathematisches Pendel (Kap. 10.11)
- numerische Lösung (Kap. 10.9)
- Reihenentwicklung (Kap. 10.10)

10.7. Lineare DGLn

Schema: Lineare Differential-Gleichungen können in zwei Abschnitten gelöst werden.

1. Lösung der homogenen DGL $\Rightarrow y_h = f(x)$
2. Suche einer speziellen Lösung $\Rightarrow y_s = f(x)$
3. Die gesamte Lösung ergibt sich durch Addition von homogener und spezieller Lösung.

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x)$$

- Das Bilden der homogen DGL wurde in Abschnitt 10.2.4 erläutert.
- Die spezielle Lösung ist entweder die Lösung für
 - * $y' = 0$ (bei konstanter Anregung)
 - * die eingeschwungene Lösung (bei sinusförmiger Anregung)
 - * Ansatz nach Tabelle (bei sonstiger Anregung)

Das obere Schema gilt allgemein für alle linearen DGLn, also auch für die mit nicht konstanten Koeffizienten. Im Abschnitt 10.7 soll die Lösung von linearen DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erarbeitet werde. Dabei sollen die Erkenntnisse erster und zweiter Ordnung auf die DGLn n-ter Ordnung angewandt werden.

10.7.1. Lineare DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' + ay = f(x)$$

soll gelöst werden. Dazu wird nach dem vorher angegebenen Schema zuerst die homogene Lösung der oberen DGL mit Hilfe der Methode "Trennung der Variablen" bestimmt:

$$\frac{dy_h}{dx} + a \cdot y_h = 0$$

$$\frac{dy_h}{y_h} = -a \cdot dx$$

$$\ln(y_h) - \ln(c) = -a \cdot x$$

$$\ln(y_h/c) = -a \cdot x$$

$$y_h = c \cdot e^{-ax} \quad \text{homogene Lösung}$$

Im zweiten Schritt muß eine spezielle Lösung gefunden werden. Der Ansatz für die spezielle Lösung ist von Art der Anregung $f(x)$ abhängig. Die Bestimmung der speziellen Lösung soll anhand von Beispielen aufgezeigt werden. Annahme: Die spezielle Lösung $y_s = f(x)$ ist schon bestimmt. Danach ergibt sich die gesamte Lösung aus der Addition von homogener und spezieller Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) = c \cdot e^{-ax} + y_s(x)$$

Im vierten Schritt muß noch über Anfangs- oder Randbedingung, die Konstante c bestimmt werden.

2. Möglichkeit zur Bestimmung der Lösung der homogenen DGL:

$$y_h' + ay_h = 0$$

Es erfolgt ein Ansatz in der Form:

$$y_h = c_1 * e^{\lambda x}$$

$$y_h' = c_1 * \lambda * e^{\lambda x}$$

y_h und y_h' werden in die homogene DGL

$$\frac{dy_h}{dx} + a * y_h = 0$$

eingesetzt und umgeformt:

$$c_1 * e^{\lambda x} * \lambda + a * c_1 * e^{\lambda x} = 0$$

$$c_1 * e^{\lambda x} * [\lambda + a] = 0$$

Die DGL muß für alle x -Werte erfüllt sein. Dieses ist nur der Fall, wenn die eckige Klammer der oberen Gleichung Null wird:

$$\lambda + a = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -a$$

Damit ergibt sich die homogene Lösung zu:

$$y_h = c_1 * e^{-ax}$$

3. Praktische Bestimmung der homogenen Lösung:

Aus den obigen Berechnungen ist bekannt: Die homogene DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{dy_h}{dx} + a * y_h = 0$$

weist die folgende homogene Lösung auf:

$$y_h = c_1 * e^{-ax}$$

Eine weiteres Schema zur Bestimmung der homogenen Lösung n -ter Ordnung (worin die erste Ordnung enthalten ist) wird im Abschnitt 10.7.3 vorgestellt.

Die weiteren Beispiele in diesem Abschnitt 10.7 (auch n -ter Ordnung) werden wie folgt behandelt:

Verfahren zur Lösung von Linearen DGLn n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

- DGL ist mit n Anfangswerten gegeben:

- A] Bestimmung der homogenen Lösung
- B] Bestimmung der speziellen Lösung
- C] Gesamtlösung = homogene Lösung + spezielle Lösung
- D] Bestimmung der Integrationskonstanten durch Auswerten der Anfangsbedingungen
- E] Probe

In diesem Abschnitt (DGL 1. Ordnung) wird im folgenden der Ansatz zur speziellen Lösung untersucht. Diese Erkenntnisse lassen sich dann auch auf DGLn n -ter Ordnung anwenden.

Beispiel 1:

gegeben: DGL $y' + 5y = 8$
 Anfangsbedingung: $y(x=0) = 0$

A. homogene Lösung:

Diese erfolgt mit dem Vergleich einer schon bekannten allgemeinen Lösung:

$$y_h' + a * y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c * e^{-ax} \quad (\text{bekannt})$$

$$y_h' + 5 * y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c * e^{-5x} \quad (\text{aus Vergleich})$$

B. spezielle Lösung:

Betrachtet man die gegebene DGL

$$y' + 5y = 8$$

für $x \rightarrow \infty$ (physikalisch für $t \rightarrow \infty$) und berücksichtigt die konstante Anregung $f(x) = 8$ so ergibt sich

$$y'(t \rightarrow \infty) = 0$$

Dann sind von der DGL nur noch zwei Terme zu betrachten, aus der sich die spezielle Lösung ergibt:

$$x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad 5 * y_s = 8 \quad y_s = 8/5$$

Alternative Bestimmung der speziellen Lösung:

Da die Anregung $f(x) = 8 = a_0$ eine Polynom 0. Ordnung dargestellt, erfolgt für die spezielle Lösung der Ansatz eines Polynoms 0. Ordnung:

$$y_s = b_0$$

Zur Bestimmung von b_0 wird der obere Ansatz differenziert

$$y_s' = 0$$

und in die DGL ($y_s' + 5y_s = 8$) ein gesetzt:

$$0 + 5 * b_0 = 8 \quad \Rightarrow \quad b_0 = 8/5 \quad \Rightarrow \quad y_s = 8/5$$

C. Gesamtlösung: $y(x) = y_h + y_s = c \cdot e^{-5x} + 8/5$

D. Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 0 = c \cdot e^{-0} + 8/5 \Rightarrow c = -8/5$

$$y(x) = -8/5 \cdot e^{-5x} + 8/5$$

E. Probe: $y(x) = -8/5 \cdot e^{-5x} + 8/5$

$$y' = 8 \cdot e^{-5x}$$

DGL: $y' + 5y = 8$

$$8 \cdot e^{-5x} + 5 \left[-\frac{8}{5} \cdot e^{-5x} + \frac{8}{5} \right] = 8 = 8 \cdot e^{-5x} - 8 \cdot e^{-5x} + 8 = 8 \Rightarrow \text{DGL erfüllt}$$

$$y(x=0) = 8 = -\frac{8}{5} \cdot e^0 + \frac{8}{5} = 0 \Rightarrow \text{A.B. erfüllt}$$

Fazit aus Beispiel 1:

Anregung	spezielle Lösung
f(x)	y _s (x)
konstant	konstant
a ₀	b ₀

Beispiel 2:

gegeben: DGL $y' + 2y = 4x$
 Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 5$

A. homogene Lösung:

$$y_h' + a \cdot y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c \cdot e^{-ax} \quad (\text{bekannt})$$

$$y_h' + 2y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c \cdot e^{-2x} \quad (\text{aus Vergleich})$$

B. spezielle Lösung:

Versuch: Da die Anregung ein Polynom 1. Ordnung ist, erfolgt für die spezielle Lösung ein Ansatz in der Form eines Polynoms 1. Ordnung:

$$y_s = b_0 + b_1 \cdot x$$

Zur Bestimmung von b_0 und b_1 wird der obere Ansatz differenziert

$$y_s' = b_1$$

und in die DGL ($y' + 2y = 4x$) eingesetzt

$$b_1 + 2 \cdot (b_0 + b_1 x) = 4x$$

und umgeformt

$$(b_1 + 2b_0) + x \cdot (2b_1 - 4) = 0$$

Die obere Gleichung ist nur erfüllt, wenn diese für alle x gilt, somit müssen die oberen Klammern zu Null werden:

$$b_1 + 2b_0 = 0$$

$$2b_1 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 2 \quad 2 + 2b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = -1$$

Damit ergibt sich die spezielle Lösung zu:

$$y_s = -1 + 2x$$

C. Gesamtlösung: $y(x) = y_h + y_s = c \cdot e^{-2x} + 2x - 1$

D. Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 5 = c \cdot e^{-2 \cdot 0} + 2 \cdot 0 - 1$

$$5 = c - 1 \quad \Rightarrow \quad c = 6$$

$$y(x) = 6 \cdot e^{-2x} + 2x - 1$$

E. Probe:

$$y(x) = 6 \cdot e^{-2x} + 2x - 1$$

$$y' = -12 \cdot e^{-2x} + 2$$

$$y' + 2y = 4x$$

$$-12 \cdot e^{-2x} + 2 + 2[6e^{-2x} + 2x - 1] = 4x$$

$$-12 \cdot e^{-2x} + 2 + 12 \cdot e^{-2x} + 4x - 2 = 4x$$

\Rightarrow DGL OK

$$y(x=0) = 6 \cdot e^{-2 \cdot 0} + 2 \cdot 0 - 1 = 5$$

\Rightarrow A.B. OK

Beispiel 3:

gegeben: DGL $y' + 2y = 12x^2$
 Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 5$

A .homogene Lösung:

$$y_h' + a*y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c*e^{-ax} \quad (\text{bekannt})$$

$$y_h' + 2y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c*e^{-2x} \quad (\text{aus Vergleich})$$

B. spezielle Lösung:

Versuch: Da die Anregung ein Polynom 2. Ordnung ist, erfolgt für die spezielle Lösung ein Ansatz in der Form eines Polynoms 2. Ordnung:

$$y_s = b_0 + b_1*x + b_2*x^2$$

Zur Bestimmung von b_0 und b_1 wird der obere Ansatz differenziert

$$y_s' = b_1 + 2b_2*x$$

und in die DGL ($y' + 2y = 12x^2$) eingesetzt

$$b_1 + 2b_2*x + 2*(b_0 + b_1*x + b_2*x^2) = 12x^2$$

und umgeformt

$$(b_1 + 2b_0) + x*(2b_2 + 2b_1) + x^2(2b_2 - 12) = 0$$

Die obere Gleichung ist nur erfüllt, wenn diese für alle x gilt, somit müssen die oberen Klammern zu Null werden:

$$b_1 + 2b_0 = 0$$

$$2b_2 + 2b_1 = 0$$

$$2b_2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 6 \quad b_1 = -b_2 = -6 \quad b_0 = -b_1/2 = 3$$

Damit ergibt sich die spezielle Lösung zu:

$$y_s = 3 - 6x + 6x^2$$

C. Gesamtlösung: $y(x) = y_h + y_s = c*e^{-2x} + 3 - 6x + 6x^2$

D. Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 5 = c*e^{-2*0} + 3 - 6*0 + 6*0^2$

$$5 = c + 3 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

$$y(x) = 2*e^{-2x} + 3 - 6x + 6x^2$$

E. Probe:

$$y(x) = 2*e^{-2x} + 3 - 6x + 6x^2$$

$$y' = -4*e^{-2x} - 6 + 12x$$

$$y' + 2y = 12x^2$$

$$-4*e^{-2x} - 6 + 12x + 4*e^{-2x} + 6 - 12x + 12x^2 = 12x^2 \quad \Rightarrow \text{DGL OK}$$

$$y(x=0) = 5 = 2*e^0 + 3 + 6*0 + 6*0^2 = 5 \quad \Rightarrow \text{A.B. OK}$$

Fazit aus den Beispielen 1 bis 3:

Beispiel	Anregung	Ordnung des Polynoms	Ansatz spezielle Lösung
1	$f(x) = a_0$	0	$y_s = b_0$
2	$f(x) = a_0 + a_1x$ hier: $a_0 = 0$	1	$y_s = b_0 + b_1x$
3	$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ hier: $a_0 = a_1 = 0$	2	$y_s = b_0 + b_1x + b_2x^2$

Zur Bestimmung der Koeffizienten b_i wird der Ansatz differenziert und in die Gesamt-DGL eingesetzt. Durch Koeffizienten Vergleich der x -Potenzen (die alle Null sein müssen) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem der Polynomordnung plus ein.

Beispiel 4:

gegeben: DGL: $y' + 4y = 10\sin(3x)$

Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 3$

A. homogene Lösung:

$$y_h' + a*y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c*e^{-ax} \quad (\text{bekannt})$$

$$y_h' + 4*y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c*e^{-4x} \quad (\text{aus Vergleich})$$

B. spezielle Lösung:

Bei den letzten Beispielen war die Anregung eine Polynom n -ter Ordnung. Für die spezielle Lösung erfolgte ebenfalls ein Ansatz eines allgemeinen Polynoms n -ter Ordnung. Da in diesem Beispiel die Anregung eine Schwingung mit der Periode $2\pi/3$ darstellt, erfolgt für die spezielle Lösung auch der Ansatz einer allgemeinen Schwingung mit der Periodendauer $2\pi/3$:

$$y_s = b_1*\sin(3x) + b_2*\cos(3x)$$

Der obere Ansatz wird differenziert und in die Gesamt-DGL eingesetzt:

$$y_s' = 3b_1*\cos(3x) - 3b_2*\sin(3x)$$

$$y_s' + 4y_s = 10\sin(3x)$$

$$3b_1*\cos(3x) - 3b_2*\sin(3x) + 4b_1*\sin(3x) + 4b_2*\cos(3x) = 10*\sin(3x)$$

$$(-3b_2 + 4b_1 - 10)*\sin(3x) + (3b_1 + 4b_2)*\cos(3x) = 0$$

Die obere DGL muß für alle x -Werte erfüllt sein, dieses ist nur der Fall, wenn die Koeffizienten der trigonometrischen Funktionen (Klammerausdrücke) Null sind:

$$4b_1 - 3b_2 = 10$$

$$3b_1 + 4b_2 = 0$$

Das obere Gleichungssystem 2. Ordnung wird gelöst und in den Ansatz der speziellen Lösung eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16 - (-9)} \begin{pmatrix} 4 & +3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = 1.6 \quad b_4 = -1.2$$

$$y_s = 1.6 \cdot \sin(3x) - 1.2 \cdot \cos(3x)$$

Die Bestimmung der speziellen Lösung war in diesem Fall etwas aufwendig. Das Problem war eine lineare Differentialgleichung mit sinusförmiger Anregung. In EG III wird gezeigt, daß die spezielle Lösung, die eingeschwingene Lösung ist, die sich mit der Hilfe der komplexen Methode aus EG II bestimmen läßt.

C. Gesamtlösung:

$$y(x) = y_h + y_s = c \cdot e^{-4x} + 1.6 \cdot \sin(3x) - 1.2 \cdot \cos(3x)$$

D. Anfangsbedingung auswerten:

$$y(x=0) = y_0 = 3 = c \cdot e^{-4 \cdot 0} + 1.6 \cdot \sin(3 \cdot 0) - 1.2 \cdot \cos(3 \cdot 0)$$

$$3 = c - 1.2 \quad \Rightarrow \quad c = 4.2$$

$$y(x) = 4.2 \cdot e^{-4x} + 1.6 \cdot \sin(3x) - 1.2 \cdot \cos(3x)$$

E. Probe:

$$y(x) = 4.2 \cdot e^{-4x} + 1.6 \cdot \sin(3x) - 1.2 \cdot \cos(3x)$$

$$y = 4.2 \cdot e^{-4x} + 1.6 \cdot \sin(3x) - 1.2 \cdot \cos(3x)$$

$$y' = -16.8 \cdot e^{-4x} + 4.8 \cdot \cos(3x) + 3.6 \cdot \sin(3x)$$

$$y' + 4y = 10 \cdot \sin(3x)$$

$$-16.8 \cdot e^{-4x} + 4.8 \cdot \cos(3x) + 3.6 \cdot \sin(3x) + 16.8 \cdot e^{-4x} + 6.4 \cdot \sin(3x) - 4.8 \cdot \cos(3x) = 10 \cdot \sin(3x) \quad \Rightarrow \quad \text{DGL OK}$$

$$y_0 = 3 = 4.2 \cdot e^0 + 1.6 \cdot \sin(0) - 1.2 \cdot \cos(0) = 4.2 - 1.2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{A.B. OK}$$

Fazit aus Beispiel 4:

Anregung	spezielle Lösung
$f(x) = a_1 \cdot \cos(\omega x) + a_2 \cdot \sin(\omega x)$ hier $a_1 = 0$	$y_s(x) = b_1 \cdot \sin(\omega x) + b_2 \cdot \cos(\omega x)$

Beispiel 5:

gegeben: DGL: $y' + 5y = 8 * e^{-3x}$
 Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 6$

A. homogene Lösung:

$$y_h' + a * y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c * e^{-ax} \quad (\text{bekannt})$$

$$y_h' + 5 * y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c * e^{-5x} \quad (\text{aus Vergleich})$$

B. spezielle Lösung:

Da die Anregung eine e-Funktion mit e^{-3x} darstellt, erfolgt ein Ansatz für die spezielle Lösung:

$$y_s = b_0 * e^{-3x}$$

Der Ansatz wird differenziert und in die Gesamt-DGL ($y' + 5y = 8 * e^{-3x}$) eingesetzt:

$$\begin{aligned} y_s' &= -3b_0 * e^{-3x} \\ -3b_0 * e^{-3x} + 5b_0 * e^{-3x} &= 8 * e^{-3x} \\ (2b_0 - 8) * e^{-3x} &= 0 \\ 2b_0 - 8 &= 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = 4 \\ y_s &= 4 * e^{-3x} \end{aligned}$$

C. Gesamtlösung:

$$y(x) = y_h + y_s = c * e^{-5x} + 4 * e^{-3x}$$

D. Anfangsbedingung auswerten:

$$\begin{aligned} y(x=0) = y_0 = 6 &= c * e^0 + 4 * e^0 = c + 4 \\ 6 = c + 4 \quad \Rightarrow \quad c &= 2 \\ y(x) &= 2 * e^{-5x} + 4 * e^{-3x} \end{aligned}$$

E. Probe:

$$\begin{aligned} y(x) &= 2 * e^{-5x} + 4 * e^{-3x} \\ y' &= -10 * e^{-5x} - 12 * e^{-3x} \\ y' + 5y &= 8 * e^{-3x} \\ -10 * e^{-5x} - 12 * e^{-3x} + 10 * e^{-5x} + 20 * e^{-3x} &= 8 * e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad \text{DGL OK} \\ y_0 &= 2 * e^0 + 4 * e^0 = 6 \quad \Rightarrow \quad \text{A.B. OK} \end{aligned}$$

Fazit aus Beispiel 5:

Anregung	spezielle Lösung
$f(x) = a_0 * e^{-ax}$	$y_s = b_0 * e^{-ax}$

Beispiel 6:

gegebene: DGL: $y' + y = e^{-x}$
 Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 2$

A. homogene Lösung:

$$y_h' + a \cdot y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c \cdot e^{-ax} \quad (\text{bekannt})$$

$$y_h' + y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c \cdot e^{-x} \quad (\text{aus Vergleich})$$

B. spezielle Lösung:

Wegen der Anregung müßte eigentlich der Ansatz erfolgen:

$$y_h = b_0 \cdot e^{-x}$$

Dieses wäre aber gleich der homogenen Lösung und bringt somit kein Erfolg.

Satz: Wenn die Struktur der speziellen und der homogenen Lösung gleich ist, muß für die spezielle Lösung ein x multiplikativ spendiert werden.

Ansatz: $y_s = b_0 \cdot x \cdot e^{-x}$
 $y_s' = b_0 \cdot e^{-x}(1 - x)$
 $y_s' + y_s - e^{-x} = 0$
 $b_0 \cdot e^{-x}(1 - x) + b_0 \cdot x \cdot e^{-x} - e^{-x} = 0$
 $e^{-x}[b_0 - b_0 \cdot x + b_0 \cdot x - 1] = 0$
 $e^{-x}[b_0 - 1] = 0$
 $b_0 = 1$
 $y_s = x \cdot e^{-x}$

C. Gesamtlösung: $y(x) = y_h + y_s = c \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x}$

D. Anfangsbedingung auswerten: $y(x=0) = y_0 = 2 = c \cdot e^{-0} + 0 \cdot e^{-0} \quad \Rightarrow \quad c = 2$
 $y(x) = 2 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} = e^{-x}(2 + x)$

E. Probe:

$$y(x) = e^{-x}(2 + x)$$

$$y'(x) = e^{-x}(1 - 2 - x) = e^{-x}(-1 - x)$$

$$y' + y = e^{-x}$$

$$e^{-x}(-1 - x) + e^{-x}(2 + x) = e^{-x}$$

$$e^{-x}(-1 - x + 2 + x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{DGL OK}$$

$$y(x=0) = e^{-0}(2 + 0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{A.B. OK}$$

Fazit aus Beispiel 6:

Satz: Wenn die Struktur der speziellen und gleich der homogenen Lösung gleich ist, muß für die spezielle Lösung ein x multiplikativ spendiert werden.

Beispiel 7:

gegeben: DGL: $y' + 3y = 7x * e^{-2x}$

Anfangsbedingung: $y(x=0) = -2$

A. homogene Lösung:

$$y_h' + a * y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c * e^{-ax} \quad (\text{bekannt})$$

$$y_h' + 3y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c * e^{-3x} \quad (\text{aus Vergleich})$$

B. spezielle Lösung:

Aufgrund der Struktur der Anregung erfolgt der Ansatz:

$$y_s = (b_0 + b_1 * x) * e^{-2x}$$

$$y_s' = (b_1 - 2b_0 - 2b_1 * x) * e^{-2x}$$

$$y' + 3y = 7x * e^{-2x}$$

$$(b_1 - 2b_0 - 2b_1 * x) * e^{-2x} + 3 * (b_0 + b_1 * x) * e^{-2x} = 7x * e^{-2x}$$

$$e^{-2x} * [(b_1 - 2b_0 + 3b_0) + (-2b_1 + 3b_1 - 7)x] = 0$$

$$b_1 + b_0 = 0$$

$$b_1 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 7 \quad b_0 = -7$$

$$y_s = (-7 + 7x) * e^{-2x}$$

C. Gesamtlösung: $y(x) = y_h + y_s = c * e^{-3x} + (7x - 7) * e^{-2x}$

D. Anfangsbedingung:

$$y_0 = -2 = c * e^{-0} + (7 * 0 - 7) * e^{-0}$$

$$-2 = c - 7 \quad \Rightarrow \quad c = 5$$

$$y(x) = 5 * e^{-3x} + (7x - 7) * e^{-2x}$$

E. Probe:

$$y(x) = 5 * e^{-3x} + (7x - 7) * e^{-2x}$$

$$y' = -15 * e^{-3x} + (7 - 14x + 14) * e^{-2x} = -15 * e^{-3x} + (21 - 14x) * e^{-2x}$$

$$y' + 3y = 7x * e^{-2x}$$

$$-15 * e^{-3x} + (21 - 14x) * e^{-2x} + 15 * e^{-3x} + (21x - 21) * e^{-2x} = 7x * e^{-2x}$$

$$e^{-3x}[-15 + 15] + e^{-2x}[21 - 14x + 21x - 21 - 7x] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{DGL OK}$$

$$y_0 = 5 * e^{-0} + (7 * 0 - 7) * e^{-0} = 5 - 7 = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{A.B. OK}$$

Fazit aus Beispiel 7:

Anregung	spezielle Lösung
$f(x) = (a_0 + a_1 x) * e^{-ax}$	$y_s = (b_0 + b_1 x) * e^{-ax}$

Beispiel 8:

gegeben: DGL: $y' + 5y = 8 + 8e^{-3x}$

Anfangsbedingung: $y(x=0) = 2$

A. homogene Lösung:

$$y_h' + a*y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c*e^{-ax} \quad (\text{bekannt})$$

$$y_h' + 5y_h = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = c*e^{-5x} \quad (\text{aus Vergleich})$$

B. spezielle Lösung:

Da die Anregung sich aus einer Summe von einem Polynom 0. Ordnung und einer e-Funktion zusammensetzt, erfolgt für die spezielle Lösung auch ein Ansatz in Form einer Summe aus oben genannten Funktionen:

$$y_s = a_0 + a_1*e^{-3x} = y_{s1} + y_{s2}$$

Die Koeffizienten a_0 und a_1 werden (wie schon bekannt) durch Einsetzen in die DGL und anschließendem Koeffizientenvergleich bestimmt:

$$y_s' = -3 a_1 e^{-3x}$$

$$y' + 5y = 8 + 8e^{-3x}$$

$$-3a_1 e^{-3x} + 5(a_0 + a_1 e^{-3x}) = 8 + 8e^{-3x}$$

$$(2*a_1 - 8)e^{-3x} + (5*a_0 - 8) = 0$$

$$2*a_1 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 4$$

$$5*a_0 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 8/5 = 1.6$$

$$y_s = \frac{8}{5} + 4*e^{-3x} \quad y_{s1} = 1.6 \quad y_{s2} = 4*e^{-3x}$$

C. Gesamtlösung: $y(x) = y_h + y_s = c*e^{-5x} + 1.6 + 4*e^{-3x}$

D. Anfangsbedingung: $y_0 = 2 = c + 1.6 + 4*e^0 = c + 5.6 \quad \Rightarrow \quad c = -3.6$

$$y(x) = -3.6*e^{-5x} + 1.6 + 4*e^{-3x}$$

E. Probe: $y(x) = -3.6*e^{-5x} + 1.6 + 4*e^{-3x}$

$$y' = 18*e^{-5x} - 12*e^{-3x}$$

$$y' + 5y = 8 + 8*e^{-3x}$$

$$18*e^{-5x} - 12*e^{-3x} - 18*e^{-5x} + 8 + 20*e^{-3x} = 8 + 8*e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad \text{DGL OK}$$

$$y_0 = -3.6*e^0 + 1.6 + 4*e^0 = -3.6 + 1.6 + 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{A.B OK}$$

Fazit aus Beispiel 8:

Besteht die Anregung aus einer Summe von Funktionen, muß die spezielle Lösung auch als eine Summe entsprechend den Einzelfunktionen gewählt werden. Anhand der nachfolgenden Tabelle soll die spezielle Lösung der Beispiele 1, 5 und 8 diskutiert werden:

Beispiel	DGL	spezielle Lösung
1	$y' + 5y = 8 = f_1(x)$	$y_{s1} = \frac{8}{5}$
5	$y' + 5y = 8 \cdot e^{-3x} = f_2(x)$	$y_{s2} = 4 \cdot e^{-3x}$
8	$y' + 5y = 8 + 8 \cdot e^{-3x} = f(x)$ $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ $f_1(x) = 8$ $f_2(x) = 8 \cdot e^{-3x}$	$y_s = \frac{8}{5} + 4 \cdot e^{-3x}$ $y_s = y_{s1} + y_{s2}$ $y_{s1} = \frac{8}{5}$ $y_{s2} = 4 \cdot e^{-3x}$

Aus der oberen Tabelle läßt sich ablesen:

- Alle drei DGLn weisen die gleiche homogene DGL auf.
- Bei der dritten DGL besteht die Anregung aus der Summe der beiden ersten Anregungen.
- Auch die spezielle Lösung der dritten DGL ergibt sich aus der Summe der ersten und zweiten speziellen Lösung.

Besteht die Anregung einer linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus einer Summe von Funktion, so lassen sich die speziellen Lösungen einzeln bestimmen und anschließend addieren.

Physikalischer Hintergrund der Elektrotechnik: Die Analyse von linearen Netzwerken mit R, L, C und Spannungsquellen ergibt lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Anregungen repräsentierten die Spannungsquellen. Bei einem linearen Netzwerk lassen sich die Auswirkungen von Spannungsquelle überlagern (addieren). Deswegen lassen sich auch die speziellen Lösungen addieren.

Zusammenfassung: Ansatz für die Wahl der speziellen Lösung, auch gültig für lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten		
Anregung	spezielle Lösung	Beispiel
$f(x)$	$y_s(x)$	
a_0	b_0	1
$a_1 x$	$b_0 + b_1 x$	2
$a_2 x^2$	$b_0 + b_1 x + b_2 x^2$	3
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$	$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$	
$a_n x^n$	$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$	
$a_1 \cdot \sin(ax)$	$b_1 \cdot \sin(ax) + b_2 \cdot \cos(ax)$	4
$a_1 \cdot \cos(ax)$	$b_1 \cdot \sin(ax) + b_2 \cdot \cos(ax)$	
$a_1 \cdot \sin(ax) + a_2 \cdot \cos(ax)$	$b_1 \cdot \sin(ax) + b_2 \cdot \cos(ax)$	
$a_0 \cdot e^{-ax}$	$b_0 \cdot e^{-ax}$	5
$e^{-ax}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)$	$e^{-ax}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n)$	aus 7
$f_1(x)$	y_{s1}	1
$f_2(x)$	y_{s1}	5
$f(x) = f_2(x) + f_2(x)$	$y_s = y_{s1} + y_{s2}$	8

10.7.2. Lineare DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Lösung von linearen DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten unterscheidet sich nicht wesentlich von denen der ersten Ordnung. Die im letzten Abschnitt angegebenen Schritte müssen auch hier durchgeführt werden. Der größte Unterschied besteht in der Bestimmung der homogenen Lösung y_h . Die Bestimmung der speziellen Lösung erfolgt in der fast gleichen Art wie bei linearen DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Kap. 10.7.1, voriger Abschnitt).

Die allgemeine Form, der linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (10.7.2.1)$$

Im einführenden (theoretischen) Teil dieses Abschnittes soll nur die homogene Lösung untersucht werden, weil (wie schon erwähnt) hier bei der Unterschied zu den DGLn 1. Ordnung besteht. Das gesamte Lösungsverfahren soll anschließend wieder anhand von Beispielen untersucht werden.

Für die lineare homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y''_h + a_1 y'_h + a_0 y_h = 0 \quad (10.7.2.2)$$

muß ein Ansatz gefunden werden. Wie bei der homogenen DGL 1. Ordnung soll ein Ansatz mit einer e-Funktionen versucht werden:

$$y_h = c * e^{\lambda x} \quad (10.7.2.3)$$

Der Ansatz wird zweimal differenziert

$$y'_h = \lambda * c * e^{\lambda x}$$

$$y''_h = \lambda^2 * c * e^{\lambda x}$$

und in die homogene DGL ($y''_h + a_1 y'_h + a_0 y_h = 0$) eingesetzt und umgeformt:

$$\lambda^2 * c * e^{\lambda x} + a_1 * \lambda * c * e^{\lambda x} + a_0 * c * e^{\lambda x} = 0$$

$$[\lambda^2 + a_1 * \lambda + a_0] * e^{\lambda x} = 0$$

Die obere Gleichung muß für alle x erfüllt sein, dieses ist der Fall, wenn die eckige Klammer Null wird:

$$\lambda^2 + a_1 * \lambda + a_0 = 0 \quad (10.7.2.4)$$

Obere Gleichung wird charakteristisches Polynom der DGL (10.7.2.1) genannt. Die Lösung des charakteristischen Polynoms (10.7.2.4) mittels quadratischer Gleichung ergibt zwei Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = -\frac{a_1}{2} \pm j \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \quad (10.7.2.5)$$

Bei der Auswertung von (10.7.6.2.5) sind die 3 Fälle zu unterscheiden:

- Fall 1: zwei verschiedene reelle Lösungen
- Fall 2: konjugiert komplexe Lösung
- Fall 3: eine reelle Doppellösung

Fall 1: Zwei verschiedene reelle Nullstellen

Dieser Fall ist der einfachste. Die λ -Werte sind verschieden und reell:

$$\lambda_1 = a_{r1} \quad \lambda_2 = a_{r2} \quad a_{r1} \neq a_{r2} \quad a_{r1}, a_{r2} \in \mathbb{R}$$

Die homogene Lösung nach (10.7.2.3) muß zwei Integrationskonstanten enthalten, weil sonst die Lösung einer DGL 2. Ordnung nach Kap. 10.2.6 nicht vollständig ist. Da sich zwei " λ "-Werte ergeben, muß die homogene Lösung auch zwei e-Funktionen als Summe enthalten:

$$y_h = c_1 * e^{a_{r1}x} + c_2 * e^{a_{r2}x} \quad (10.7.2.6)$$

Fall 2: Konjugiert komplexe Nullstellen

Mit den Werten

$$\lambda_1 = -a + jb \quad \lambda_2 = -a - jb \quad a, b \in \mathbb{R}$$

erfolgt ein Ansatz mit zwei komplexen e-Funktionen für die homogene Lösung:

$$y_h = c_3 * e^{\lambda_1 x} + c_4 * e^{\lambda_2 x}$$

Umformen und Einsetzen ergibt:

$$y_h = c_3 * e^{(-a+jb)x} + c_4 * e^{(-a-jb)x}$$

$$y_h = c_3 * e^{-ax} * e^{jbx} + c_4 * e^{-ax} * e^{-jbx}$$

$$y_h = e^{-ax} [c_3 * e^{jbx} + c_4 * e^{-jbx}]$$

$$e^{\pm jbx} = \cos(bx) \pm j * \sin(bx)$$

$$y_h = e^{-ax} [c_3 \{ \cos(bx) + j * \sin(bx) \} + c_4 \{ \cos(bx) - j * \sin(bx) \}]$$

$$y_h = e^{-ax} [(c_3 + c_4) \cos(bx) + j * (c_3 - c_4) \sin(bx)]$$

$$\text{Substitution:} \quad c_1 = c_3 + c_4 \quad c_2 = j(c_3 - c_4)$$

$$y_h = e^{-ax} [c_1 * \cos(bx) + c_2 * \sin(bx)] \quad (10.7.2.7)$$

Die komplexe Rechnung war in diesem Fall nur ein Umweg. Die Lösung einer reellen DGL ergibt auch eine reelle Funktion. Die Lösung (10.7.2.7) repräsentiert für $a > 0$ eine gedämpfte Schwingung mit der Periode $2\pi/b$. Die Amplituden klingen mit e^{-ax} (technisch meist $a > 0$) ab, d.h. nach $\Delta x = -1/a$ verringert sich die Amplitude um den Wert $1/e$. Trifft man beim Lösen von linearen DGL mit konstanten Koeffizienten auf konjugiert komplexe Lösungen, muß die obige aufwendige Umformung nicht durchgeführt werden. Es reicht die Feststellung, daß der Realteil von λ in der e-Funktion von (10.7.2.7) erscheint und der Imaginärteil jeweils in den zwei trigonometrischen Funktionen.

Falle 3: Doppelte Nullstelle

Mit den Werten

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a$$

bringt der Ansatz

$$y_h = c_3 * e^{ax} + c_4 * e^{ax} = c_1 * e^{ax} \quad \Rightarrow \quad y_{h1} = c_1 * e^{ax}$$

nur eine unabhängige Konstante. Es muß noch nach einer zweiten Lösung gesucht werden, damit nach Kap. 10.2.6 die DGL 2. Ordnung mit 2 Integrationskonstanten auch eine vollständig Lösung erhält. Abhilfe: Multiplikation mit x :

$$y_{h2} = c_2 * e^{ax} * x$$

Behauptung: $y_h = c * x * e^{ax}$ ist eine Lösung der homogen DGL: $y_h'' - 2ay_h' + a^2y_h = 0$

Beweis: 1. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der DGL sind zweifach bei $\lambda = a$ vorhanden:

$$\lambda = a \pm \sqrt{a^2 - a^2} = a$$

2. DGL muß erfüllt sein:

$$y_h = c * e^{ax}$$

$$y_h' = c * e^{ax} * (1 + ax)$$

$$y_h'' = c * e^{ax} (a + a + a^2x) = c * e^{ax} (2a + a^2x)$$

$$y_h'' - 2ay_h' + a^2y_h = 0$$

$$c * e^{ax} [2a + a^2x - 2a(1 + ax) + a^2x] = 0$$

$$c * e^{ax} [2a + a^2x - 2a - 2a^2x + a^2x] = 0$$

Somit ergibt sich die homogene Lösung bei doppelter Nullstelle des charakterischen Polynoms (10.7.2.4) zu:

$$y_h = y_{h1} + y_{h2}$$

$$y_h = c_1 * e^{ax} + c_2 * x * e^{ax}$$

Praktische Bestimmung der λ -Werte

Aus dem Vergleich von DGL

$$y'' + a_1y' + a_0y = f(x) \quad (10.7.2.1)$$

und charakteristischem Polynom

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (10.7.2.4)$$

ergibt sich, daß das charakteristische Polynom auch direkt ohne Umweg über Ansätze aus der DGL aufgestellt werden kann.

Anfangsbedingungen:

Bei einer DGL 2. Ordnung müssen 2 Anfangs- oder Randbedingungen gegeben sein. Die zwei Anfangsbedingungen wären:

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y'_0$$

Die zwei Randbedingungen wären:

$$y(x=a) = y_1$$

$$y(x=c) = y_2$$

Zusammenfassung:	Homogene Lösung der DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
DGL:	$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$
charakteristisches Polynom	$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$
Eigenwerte	$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = -\frac{a_1}{2} \pm j \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$
$\lambda_1 = -a_{r1}$ $\lambda_2 = -a_{r2}$ zwei verschieden reelle Nullstellen	$y_h = c_1 * e^{-a_{r1}x} + c_2 * e^{-a_{r2}x}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = -a$ zwei gleich reelle Nullstellen	$y_h = c_1 * e^{-ax} + c_2 * x * e^{-ax}$
$\lambda_{1,2} = -a \pm jb$ konjugiert komplexe Nullstelle	$y_h = e^{-ax} [c_1 * \cos(bx) + c_2 * \sin(bx)]$

Beispiel 1:

gegeben: DGL: $y'' + 4y' + 3y = 15$
 Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 3$
 $y'(x=0) = y_0' = 8$

A. homogene Lösung:

homogene DGL: $y_h'' + 4y_h' + 3y_h = 0$

ch. Polynom: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3} = -2 \pm 1$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -3$$

Ansatz: $y_h = c_1 * e^{-x} + c_2 * e^{-3x}$

B. spezielle Lösung:

Anregung: $f(x) = \text{const}$

$$y_s = b_0$$

$$y_s' = 0$$

$$y_s'' = 0$$

DGL: $y'' + 4y' + 3y = 15$

Einsetzen in DGL: $0 + 0 + 3 * b_0 = 15$

$$b_0 = 5$$

$$y_s = 5$$

C. Gesamtlösung: $y(x) = y_h + y_s = c_1 * e^{-x} + c_2 * e^{-3x} + 5$

D. Anfangsbedingungen: $y(x) = y_h + y_s = c_1 * e^{-x} + c_2 * e^{-3x} + 5$

$$y' = -c_1 * e^{-x} - 3c_2 * e^{-3x}$$

$$y_0 = c_1 * e^{-0} + c_2 * e^{-0} + 5 = c_1 + c_2 + 5 = 3$$

$$y_0' = -c_1 * e^{-0} - 3c_2 * e^{-0} = -c_1 - 3c_2 = 8$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$y = e^{-x} - 3 * e^{-3x} + 5$$

E. Probe:

$$y = e^{-x} - 3 * e^{-3x} + 5$$

$$y' = -e^{-x} + 9 * e^{-3x}$$

$$y'' = e^{-x} - 27 * e^{-3x}$$

$$y'' + 4y' + 3y = 15$$

$$(e^{-x} - 27 * e^{-3x}) + 4 * (-e^{-x} + 9 * e^{-3x}) + 3 * (e^{-x} - 3 * e^{-3x} + 5) = 15$$

$$e^{-x}(1 - 4 + 3) + e^{-3x}(-27 + 36 - 9) + 15 = 15 \quad \Rightarrow \quad \text{DGL OK}$$

$$y_0 = e^{-0} - 3 * e^{-0} + 5 = 1 - 3 + 5 = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{OK}$$

$$y_0' = -e^{-0} + 9 * e^{-0} = -1 + 9 = 8 \quad \Rightarrow \quad \text{OK}$$

Beispiel 2:

gegeben: DGL: $y'' + 4y' + 13y = 40\cos(x)$

Anfangsbedingung: $y(x=0) = y_0 = 5$
 $y'(x=0) = y'_0 = 0$

A. homogene Lösung:

homogene DGL: $y_h'' + 4y_h' + 13y_h = 0$

ch. Polynom: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm j3$

Ansatz: $y_h = e^{-2x} [c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)]$

B. spezielle Lösung:

Anregung: $f(x) = \cos(x)$

Ansatz: $y_s = A \cos(x) + B \sin(x)$

$$y_s' = -A \sin(x) + B \cos(x)$$

$$y_s'' = -A \cos(x) - B \sin(x)$$

DGL: $y'' + 4y' + 13y = \cos(x)$

einsetzen: $[-A \cos(x) - B \sin(x)] + 4[-A \sin(x) + B \cos(x)] + 13[A \cos(x) + B \sin(x)] = 40 \cos(x)$

$$\cos(x) [-A + 4B + 13A - 40] + \sin(x) [-B - 4A + 13B] = 0$$

$$12A + 4B = 40$$

$$-4A + 12B = 0$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{144 + 16} \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ +4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{160} \begin{pmatrix} 480 \\ 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = 3 \quad B = 1$$

$$y_s = 3 \cos(x) + \sin(x)$$

C. Gesamtlösung: $y(x) = y_h + y_s = e^{-2x} [c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)] + 3 \cos(x) + \sin(x)$

D. Anfangsbedingungen auswerten:

$$y(x=0) = 5 = c_1 + 3 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2$$

$$y' = e^{-2x} [-2c_1 \cos(3x) - 2c_2 \sin(3x) - 3c_1 \sin(3x) + 3c_2 \cos(3x)] - 3 \sin(x) + \cos(x)$$

$$y'(x=0) = -2c_1 + 3c_2 + 1 = 0$$

$$3c_2 = -1 + 2c_1$$

$$c_2 = 1$$

$$y = e^{-2x} [2 \cos(3x) + \sin(3x)] + 3 \cos(x) + \sin(x)$$

E. Probe:

$$y = e^{-2x}[2\cos(3x) + \sin(3x)] + 3\cos(x) + \sin(x)$$

$$y' = e^{-2x}[-4\cos(3x) - 2\sin(3x) - 6\sin(3x) + 3\cos(3x)] - 3\sin(x) + \cos(x)$$

$$y' = e^{-2x}[-\cos(3x) - 8\sin(3x)] - 3\sin(x) + \cos(x)$$

$$y'' = e^{-2x}[2\cos(3x) + 16\sin(3x) + 3\sin(3x) - 24\cos(3x)] - 3\cos(x) - \sin(x)$$

$$y'' = e^{-2x}[-22\cos(3x) + 19\sin(3x)] - 3\cos(x) - \sin(x)$$

$$y'' + 4y' + 13y = 40\cos(x)$$

$$e^{-2x}[-22\cos(3x) + 19\sin(3x)] + [-3\cos(x) - \sin(x)]$$

$$+ 4e^{-2x}[-\cos(3x) - 8\sin(3x)] + 4[-3\sin(x) + \cos(x)]$$

$$+ 13e^{-2x}[2\cos(3x) + \sin(3x)] + 13[3\cos(x) + \sin(x)] = 40\cos(x)$$

$$e^{-2x}\{\cos(3x)[-22 - 4 + 26] + \sin(3x)[19 - 32 + 13]\} + \cos(x)[-3 + 4 + 39 - 40] + \sin(x)[-1 - 12 + 13] = 0$$

=> OK

$$y(x=0) = 2 + 3 = 5$$

=> OK

$$y'(x=0) = -1 + 1 = 0$$

=> OK

Beispiel 3:

gegeben: DGL $y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2x}$
 Anfangsbedingung: $y(x=0) = 7$
 $y'(x=0) = 0$

A. homogene Lösung:

homogene DGL: $y_h'' + 4y_h' + 4y_h = 0$

ch. Polynom: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 4} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$

Hier ist eine doppelte Nullstelle vorhanden. Bei der homogenen Lösung muß ein x spendiert werden, damit bei einer DGL 2. Ordnung zwei Integrationskonstanten vorhanden sind:

$$y_h = c_1 * e^{-2x} + c_2 * x * e^{-2x} = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$$

B. spezielle Lösung:

Normal müßte hier wegen der Anregung $10 * e^{-2x}$ der Ansatz $y_s = a * e^{-2x}$ erfolgen. Dieser ist aber schon in der homogenen Lösung enthalten. Auch $y_s = b * x * e^{-2x}$ ist schon in der homogenen Lösung enthalten. Also noch ein x spendieren:

$$y_s = b * x^2 * e^{-2x}$$

$$y_s' = b * e^{-2x}(-2x^2 + 2x)$$

$$y_s'' = b * e^{-2x}(+4x^2 - 4x - 4x + 2) = b * e^{-2x}(4x^2 - 8x + 2)$$

$$y_s'' + 4y_s' + 4y_s = 10e^{-2x}$$

$$b * e^{-2x}[(4x^2 - 8x + 2) + 4 * (-2x^2 + 2x) + 4 * (x^2)] = 10e^{-2x}$$

$$b * e^{-2x}[4x^2 - 8x + 2 - 8x^2 + 8x + 4x^2] = 10e^{-2x}$$

$$b * 2 = 10 \quad \Rightarrow \quad b = 5$$

$$y_s = 5x^2 * e^{-2x}$$

C. Gesamtlösung:

$$y = y_h + y_s = e^{-2x}(c_1 + c_2 x) + 5x^2 * e^{-2x}$$

$$y = e^{-2x}(5x^2 + c_2 x + c_1)$$

D. Anfangsbedingung auswerten:

$$y' = e^{-2x}(-10x^2 - 2c_2 x - 2c_1 + 10x + c_2)$$

$$y(x=0) = c_1 = 7 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 7$$

$$y'(x=0) = -2c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = +2c_1 = +14$$

$$y = e^{-2x}(5x^2 + 14x + 7)$$

E. Probe:

$$y = e^{-2x}(5x^2 + 14x + 7)$$

$$y' = e^{-2x}(-10x^2 - 28x - 14 + 10x + 14) = e^{-2x}(-10x^2 - 18x)$$

$$y'' = e^{-2x}(+20x^2 + 36x - 20x - 18) = e^{-2x}(20x^2 + 16x - 18)$$

$$y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2x}$$

$$e^{-2x}[(20x^2 + 16x - 18) + 4(-10x^2 - 18x) + 4(5x^2 + 14x + 7)] = 10e^{-2x}$$

$$e^{-2x}[20x^2 + 16x - 18 - 40x^2 - 72x + 20x^2 + 56x + 28 - 10] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{OK}$$

$$y'(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{OK}$$

$$y(x=0) = 7 \quad \Rightarrow \quad \text{OK}$$

Studenten: 3 Aufgaben

10.7.3. Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Für die Behandlung von linearen DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten soll die Erfahrung der beiden vorhergehenden Kapitel (DGL 1. + 2. Ordnung) genutzt werden. Wie bei erster und zweiter Ordnung muß auch bei der Lösung von DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten die folgende Reihenfolge eingehalten werden.

A. homogene Lösung $y_h(x)$ bestimmen

B. spezielle Lösung $y_s(x)$ bestimmen

C. Beide Lösungen addieren

D. Anfangsbedingungen auswerten

E. Probe

Die allgemeine Form der linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Die einzelnen Abschnitte A bis E der Lösung der obigen DGL werden im folgenden vorgestellt.

A. homogene Lösung

Für die homogene DGL n-ter Ordnung

$$y_h^{(n)} + a_{n-1} \cdot y_h^{(n-1)} + \dots + a_3 y_h''' + a_2 y_h'' + a_1 y_h' + a_0 y_h = 0$$

erfolgt der Lösungsansatz:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + \dots + c_{n-1} \cdot e^{\lambda_{n-1} x} + c_n \cdot e^{\lambda_n x}$$

Die obere Lösung ist bei einer DGL n-ter Ordnung vollständig da n - frei wählbare Integrationskonstanten vorhanden sind. Die c_i sind aus den Rand- bzw. Anfangsbedingungen zu bestimmen. Die λ_i sind durch Einsetzen in die homogene DGL zu bestimmen. Dabei reicht es einen Term $c_i \cdot e^{\lambda_i x}$ in die DGL einzusetzen. Der Ansatz $y(x)$ wird n-mal differenziert:

$$y = c \cdot e^{\lambda x}$$

$$y' = \lambda \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

$$y''' = \lambda^3 \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

....

$$y^{(n-1)} = \lambda^{n-1} \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

$$y^{(n)} = \lambda^n \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

und in die homogene DGL eingesetzt:

$$e^{\lambda x} [\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_3 \cdot \lambda^3 + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0] = 0$$

Die obere Gleichung muß für alle x -Werte erfüllt sein, dieses ist nur der Fall, wenn die obere eckige Klammer Null wird, damit ergibt sich das charakteristische Polynom in λ :

$$\lambda^n + a_{n-1} * \lambda^{n-1} + \dots + a_3 * \lambda^3 + a_2 * \lambda^2 + a_1 * \lambda + a_0 = 0$$

Aus der DGL läßt sich sofort das charakteristische Polynom angeben. Dieses braucht nicht mehr durch Ansatz, Differenzieren und Einsetzen in die homogene DGL ermittelt werden. Die n Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind zu bestimmen. Die λ_i werden Eigenwerte genannt. Die Art der Nullstellen können nun verschieden sein:

- einfach reell
- mehrfach reell
- konjugiert komplex
- mehrfach konjugiert komplex
- Kombination der oben vier genannten Nullstellen

Für jede Nullstelle erfolgt der Ansatz einer Teillösung mit einer Integrationskonstante. Ausnahme: Die konjugiert komplexe Nullstelle wird zusammengefaßt und auch die Mehrfachlösungen. Der Ansatz einer konjugiert komplexen Nullstelle wurde anhand der DGL 2. Ordnung in Abschnitt 10.7.2 erläutert. Ebenfalls in Kap. 10.7.2 wurde aufgezeigt, daß pro Mehrfachlösung ein x multiplikativ spendiert werden muß.

Ansatz der homogenen Teillösungen (T = Teillösung)

Ansatz für eine einfach reelle Nullstelle:

$$y_{hT} = c_i * e^{\lambda_i x}$$

Ansatz für eine n-fach reelle Nullstelle:

$$y_{hT} = e^{\lambda_i x} (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1})$$

Ansatz für eine einfach konjugiert komplexe Nullstelle:

$$\lambda_i = a_i \pm j b_i \quad 2 \text{ Lösungen}$$

$$y_{hT} = e^{a_i x} [c_1 \cos(b_i x) + c_2 \sin(b_i x)]$$

Ansatz für eine n-fach konjugiert komplexe Nullstelle:

$$\lambda_i = a_i \pm j b_i \quad 2n\text{-Lösungen}$$

$$y_{hT} = e^{a_i x} [(c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1}) \cos(b_i x) + (d_1 + d_2 x + \dots + d_n x^{n-1}) c_2 \sin(b_i x)]$$

Die gesamte homogene Lösung ergibt sich aus der Addition der zu den Nullstellen gehörenden Teillösungen. Die DGL n -ter Ordnung muß n Integrationskonstanten enthalten.

Beispiel:

Ein charakteristisches Polynom 12-ter Ordnung weist die folgenden Nullstellen (Eigenwerte) auf:

$$\lambda_1 = -4 \quad \lambda_{2,3} = -3 \quad \lambda_{4,5,6} = -5 \quad \lambda_{7,8} = -2 \pm j7 \quad \lambda_{9,10,11,12} = -8 \pm j9$$

Für die homogene Lösung erfolgt der Ansatz:

$$y_h(t) = c_1 * e^{-4x} + e^{-3x} (c_2 + c_3 x) + e^{-5x} (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) + e^{-2x} [c_7 * \cos(7x) + c_8 * \sin(7x)] + e^{-8x} [(c_9 + c_{10} x) * \cos(9x) + (c_{11} + c_{12} x) * \sin(9x)]$$

Beispiel: (Studenten)

gegeben: $\lambda_1 = -5$ $\lambda_{2,3,4} = -2$ $\lambda_{5,6} = -3 \pm j4$ $\lambda_{7,8} = -6 \pm j7$

gesucht: $y_h(x)$

B. spezielle Lösung:

Die **spezielle Lösung** wird auch **partikuläre Lösung** genannt. Je nach Anregung $f(x)$ erfolgt ein Ansatz für die spezielle Lösung y_s .

Die Bestimmung der speziellen Lösung wurde in Abschnitt 10.7.1 anhand von DGLn 1. Ordnung ausführlich diskutiert. Der Unterschied zur Bestimmung der speziellen Lösung von DGLn n-ter Ordnung besteht darin, daß der Ansatz für y_s n mal differenziert werden muß. Die Ergebnisse der folgenden Tabelle sind aus Kap. 10.7.1 übernommen.

Ansatz für die Wahl der speziellen Lösung	
Anregung	spezielle Lösung
$f(x)$	$y_s(x)$
a_0	b_0
a_1x	$b_0 + b_1x$
a_2x^2	$b_0 + b_1x + b_2x^2$
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n$	$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots b_nx^n$
a_nx^n	$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots b_nx^n$
$a_1 \cdot \sin(ax)$	$b_1 \cdot \sin(ax) + b_2 \cdot \cos(ax)$
$a_1 \cdot \cos(ax)$	$b_1 \cdot \sin(ax) + b_2 \cdot \cos(ax)$
$a_1 \cdot \sin(ax) + a_2 \cdot \cos(ax)$	$b_1 \cdot \sin(ax) + b_2 \cdot \cos(ax)$
$a_0 \cdot e^{-ax}$	$b_0 \cdot e^{-ax}$
$e^{-ax}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n)$	$e^{-ax}(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots b_nx^n)$
$f_1(x)$	y_{s1}
$f_2(x)$	y_{s1}
$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$	$y_s = y_{s1} + y_{s2}$

Die Bestimmung der Konstanten b_i erfolgt durch Bilden der n Ableitungen und Einsetzen in die Original-DGL.

Besteht die Anregung $f(x)$ aus einer Summe von Funktionen kann die spezielle Lösung einer Anregung einzeln untersucht werden. Später müssen die Teillösungen der einzelnen Anregungen addiert werden.

Ist der Ansatz zufällig schon als Teil der homogenen Lösung vorhanden, muß der Ansatz y_s solange mit x multipliziert werden, bis dieser keine Teilmenge der homogenen Lösung mehr enthält.

C. Beide Lösungen addieren:

Die homogene (aus Punkt A) und die spezielle Lösung (aus Punkt B) werden addiert. Die spezielle Lösung ist schon eindeutig. Die Bestimmung der n Konstanten der homogenen Lösung wird unter Punkt D erläutert.

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x)$$

D. Anfangs- oder Randbedingungen auswerten:

Bei ortsabhängigen DGLn (Orts-Koordinate ist unabhängig) ergeben sich meistens Randbedingungen. Bei zeitabhängigen DGLn n-ter Ordnung (hier $x \triangleq t$) werden in der Regel n Anfangsbedingungen benötigt. Dafür werden die 0. bis (n-1)-ten Ableitung bei meist $x = 0$ oder auch $x = a$ vorgegeben.

$$y(x=a) = g_1$$

$$y'(x=a) = g_2$$

....

.... meist $a = 0$

$$y^{(n-2)j}(x=a) = g_{n-1}$$

$$y^{(n-1)j}(x=a) = g_n$$

Die Gesamtlösung aus Punkt C muß (n-1) mal differenziert werden. Den Wert $x = a$ in n Gleichungen einsetzen, ergibt ein lineares Gleichungssystem n-ter Ordnung für n Koeffizienten.

10.6.3.E. Probe:

Weil die Berechnung sehr rechenintensiv ist, sind Fehler nicht auszuschließen. Eine Probe ist dringend zu empfehlen. Dazu die Lösung n mal ableiten und in die gegebene DGL einsetzen. Auch die n Anfangsbedingungen müssen überprüft werden.

Aufgabe(n):

10.8. DGL-Systeme

Beim Aufstellen von linearen DGLn n-ter Ordnung erhält man in der Regel ein System von n verkoppelten DGLn 1. Ordnung mit n abhängigen Variablen. Zur analytischen Lösung müssen diese in eine DGL n-ter Ordnung überführt werden, siehe Kap. 10.6, Beispiel 2. Die umgekehrte Richtung der Umformung ist zur numerischen Lösung (siehe Kap. 10.9) notwendig. Beide Richtungen der Umformung sollen in den nächsten zwei Abschnitten vorgestellt werden.

10.8.1. Umformung von DGLn n-ter Ordnung nach n DGLn 1. Ordnung

Zur numerischen Lösung von linearen DGLn und insbesondere von nichtlinearen DGLn ist die DGL n-ter Ordnung in ein System von n DGLn erster Ordnung umzuwandeln. Diese Umformung soll am Beispiel der allgemeinen linearen DGL 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vorgestellt werden:

$$y'''' + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Zur Umformung werden bei einer DGL n. Ordnung n abhängige Variable benötigt. Bei der DGL 4. Ordnung müssen 4 abhängige Variable $y_1 \dots y_4$ gefunden werden. Diese Richtung der Umformung ist mehrdeutig. In der Regel wird y als erste Variable gewählt und die (n-1) ersten Ableitungen als restliche Variable:

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

$$y_3 = y''$$

$$y_4 = y'''$$

Außer den oben nun schon definierten 4 Variablen werden zusätzlich noch 4 DGLn 1. Ordnung benötigt, das Aufstellen der DGLn geschieht anhand der folgenden Tabelle:

bekannt aus obiger Definition	differenzieren der linken Gleichungen	Vergleich mit linker Spalte	Ergebnis
$y_1 = y$	$y_1' = y'$	$y_1' = y' = y_2$	$y_1' = y_2$
$y_2 = y'$	$y_2' = y''$	$y_2' = y'' = y_3$	$y_2' = y_3$
$y_3 = y''$	$y_3' = y'''$	$y_3' = y''' = y_4$	$y_3' = y_4$
$y_4 = y'''$	$y_4' = y''''$	$y_4' = y''''$	$y_4' = y''''$

Die rechte Spalte der oberen Tabelle enthält schon 3 DGLn mit den definierten Variablen $y_1 \dots y_4$. y'''' muß noch als Funktion von $y_1 \dots y_4$ ausgedrückt werden. Dazu wird die gegebene DGL nach y'''' aufgelöst:

$$y'''' = -a_3 y''' - a_2 y'' - a_1 y' - a_0 y + f(x)$$

Die rechte Seite wird durch die definierten Variablen $y_1 \dots y_4$ ersetzt:

$$y_4' = -a_3 y_4 - a_2 y_3 - a_1 y_2 - a_0 y_1 + f(x)$$

Damit ergibt sich das gesuchte DGL-System von 4 DGLn erster Ordnung:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = y_4$$

$$y_4' = -a_3*y_4 - a_2*y_3 - a_1*y_2 - a_0*y_1 + f(x)$$

Die oberen Gleichungen lassen sich zu einer Matrix-Schreibweise zusammenfassen:

$$\bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\bar{y}' = \bar{A}*\bar{y} + \bar{f}(x)$$

Die oberen Matrizen und Vektoren weisen folgende Elemente auf:

$$\bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \quad \bar{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Die Umformung von einer DGL n-ter Ordnung nach n DGL 1. Ordnung ist auch für nichtlineare Systeme möglich und üblich. Die Matrix-Schreibweise ist dagegen für nichtlineare Systeme nicht üblich. Aus dem oberen Beispiel kann das Schema der Umformung einer DGL n-ter Ordnung angegeben werden.

Schema: Umformung DGL n-ter Ordnung nach n DGLn 1. Ordnung

Gegeben ist die nach $y^{n'}$ umgeformte DGL n-ter Ordnung:

$$y^{n'} = f(x, y, y', y'' \dots y^{(n-2)'}, y^{(n-1)'})$$

Umgeformt wird in das folgende DGL-System von n DGL n 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ &\dots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n) \end{aligned}$$

Die Ableitungen der gegebenen DGL werden ersetzt durch:

$$\begin{aligned} y &= y_1 \\ y' &= y_2 \\ y'' &= y_3 \\ &\dots \\ y^{n-2'} &= y_{n-1} \\ y^{n-1'} &= y_n \end{aligned}$$

Beispiel 1: (linear)

gegeben: $y''' + 2y'' + 4y' + 3y = 5\sin(x)$

Umformung: $y''' = -2y'' - 4y' - 3y + 5\sin(x)$

Definition und Ableitung der Variablen: y_1, y_2 und y_3

$$\begin{array}{ll} y_1 = y & \mathbf{y_1}' = y' = \mathbf{y_2} \\ y_2 = y' & \mathbf{y_2}' = y'' = \mathbf{y_3} \\ y_3 = y'' & \mathbf{y_3}' = y''' \end{array}$$

Kommentar: Bei der oberen Umformung wurde nicht das Schema angewandt, sondern die linke Spalte wurde einmal differenziert. Die Ableitungen von y wurden danach durch die definierten Variablen y_2 und y_3 ersetzt. Die fett markierten Gleichungen ergeben mit umgeformter gegebener DGLn das folgende System von 3 DGLn 1. Ordnung. Die Werte y, y', y'' werden in der DGL durch y_1, y_2, y_3 ersetzt:

Lösung:

$$\begin{array}{l} \mathbf{y_1}' = y_2 \\ \mathbf{y_2}' = y_3 \\ \mathbf{y_3}' = -2y_3 - 4y_2 - 3y_1 + 5\sin(x) \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5\sin(x) \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: (nichtlinear)

gegeben: $y'''' * y'' * x + y'' * y' = x * e^{-x}$

Umformung: $y'''' = \frac{x * e^{-x} - y'' * y'}{y'' * x} = \frac{e^{-x}}{y''} - \frac{y'}{x}$

Ansatz:

$$\begin{array}{ll} y_1 = y & \mathbf{y_1}' = y' = \mathbf{y_2} \\ y_2 = y' & \mathbf{y_2}' = y'' = \mathbf{y_3} \\ y_3 = y'' & \mathbf{y_3}' = y''' = \mathbf{y_4} \\ y_4 = y''' & \mathbf{y_4}' = y'''' \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = \frac{e^{-x}}{y_3} - \frac{y_2}{x} \end{array} \quad \bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \frac{e^{-x}}{y_3} - \frac{y_2}{x} \end{pmatrix}$$

Studenten: Aufgaben 10.8.1a, 10.8.2c

10.8.2. Umformung von n DGLn 1. Ordnung zu einer DGL n-ter Ordnung

Beim Aufstellen von DGLn (Auswertung physikalischer Gleichungen) erhält man meistens ein System von n DGLn erster Ordnung. Diese können dann zu einer DGL n-ter Ordnung umgeformt werden. Typisches Anwendungsbeispiel wäre hier das Aufstellen der DGLn in einem Netzwerk mit Induktivitäten und Kondensatoren (siehe Kap. 10.6, Beispiel 2).

Vorgehensweise:

Gesucht ist die DGL einer Variablen, dazu müssen durch Einsetzen und Differenzieren die DGLn der anderen Variablen eliminiert werden.

Beispiel 1:

Das Aufstellen der DGLn eines Netzwerkes mit einem Kondensator und einer Induktivität ergibt bei Ersetzen von i und u durch y_1 und y_2 :

$$a_1 * y_1 + a_2 * y_1' + y_2 = f(x) \quad (1)$$

$$y_1 - a_3 * y_2 - a_4 * y_2' = 0 \quad (2)$$

Nun kann entweder y_1 oder y_2 eliminiert werden. Die zweite Gleichung kann nur nach y_1 aufgelöst werden, weil y_2 und y_2' vorhanden sind. Ebenso kann die erste Gleichung nur nach y_2 aufgelöst, weil y_1 in nullter und erster Ableitung vorhanden ist. Entscheidung: Es wird y_2 eliminiert. Dieses ergibt eine DGL für y_1 . Dazu wird Gleichung (1) nach y_2 aufgelöst:

$$y_2 = f(x) - a_1 * y_1 - a_2 * y_1' \quad (1.2)$$

Da in Gleichung (2) auch y_2' enthalten ist, wird Gleichung (1.2) differenziert:

$$y_2' = f'(x) - a_1 * y_1' - a_2 * y_1'' \quad (1.3)$$

Gleichung (1.2) und (1.3) wird in (2) eingesetzt:

$$y_1 - a_3 [f(x) - a_1 * y_1 - a_2 * y_1'] - a_4 [f'(x) - a_1 * y_1' - a_2 * y_1''] = 0$$

$$a_4 * a_2 * y_1'' + (a_3 * a_2 + a_4 * a_1) y_1' + (1 + a_3 * a_1) y_1 = a_3 * f(x) + a_4 * f'(x)$$

Es ergibt sich, wie erwartet eine DGL 2. Ordnung.

Beispiel 2:

Das folgende Beispiel basiert auf einem Netzwerk mit drei Zweigen, zwei Knoten, zwei Kapazitäten und einer Induktivität. Drei Energiespeicher bewirken eine DGL 3. Ordnung.

gegeben: $y_1 + a_1 * y_1' + y_2 = f(x)$ (1)

$$y_2 - a_2 * y_3' = 0 \quad (2)$$

$$y_1' - a_3 * y_2' - y_3 = 0 \quad (3)$$

gesucht: DGL in y_1

Da die DGL 3. Ordnung in y_1 gesucht ist, müssen nacheinander y_2 und y_3 eliminiert werden. Die Reihenfolge ist egal. Hier wird entschieden: Erst soll y_2 und danach y_3 ersetzt werden. Dazu wird Gleichung (2) nach y_2 aufgelöst und differenziert:

$$y_2 = a_2 * y_3' \quad (2.1)$$

$$y_2' = a_2 * y_3'' \quad (2.2)$$

Einsetzen von (2.1) und (2.2) in (1) und (3) ergibt:

$$y_1 + a_1 * y_1' + a_2 * y_3' = f(x) \quad (1.1)$$

$$y_1' - a_3 * a_2 * y_3'' - y_3 = 0 \quad (3.1)$$

y_3 kann nur aus (1.1) eliminiert werden, weil (3.1) die 0. und 2. Ableitung von y_3 enthält und somit kann (3.1) nicht nach y_3 aufgelöst werden. Darum wird die Gleichung (1.1) nach y_3' aufgelöst:

$$y_3' = \frac{f(x) - y_1 - a_1 * y_1'}{a_2} \quad (1.2)$$

Da aber y_3 in (1.2) nicht vorhanden ist, aber in (3.1), muß (3.1) differenziert werden:

$$y_1'' - a_3 * a_2 * y_3''' - y_3' = 0 \quad (3.2)$$

Aus (1.2) ergibt sich durch zweimaliges Differenzieren:

$$y_3''' = \frac{f''(x) - y_1'' - a_1 * y_1'''}{a_2} \quad (1.3)$$

Die Gleichungen (1.2) und (1.3) werden in (3.2) eingesetzt:

$$y_1'' - a_3 * a_2 * \frac{f''(x) - y_1'' - a_1 * y_1'''}{a_2} - \frac{f(x) - y_1 - a_1 * y_1'}{a_2} = 0$$

Durch Umformung ergibt sich, wie erwartet, eine DGL 3. Ordnung:

$$a_1 * a_3 * y_1''' + (a_3 + 1) y_1'' + \frac{a_1}{a_2} * y_1' + \frac{y_1}{a_2} = a_3 * f''(x) + \frac{f(x)}{a_2}$$

Auch nichtlineare DGLn lassen sich auf diese Weise umformen.

10.9. Numerische Lösung

Bei vielen DGLn ist es unmöglich oder sehr aufwendig eine analytische Lösung zu finden. Bei den meisten nichtlinearen DGLn findet man keine analytische Lösung. Der Ausweg ist hier - wie bei den nicht lösbaren Integralen - die numerische Behandlung des Problems. Bei der analytischen Lösung wurden in der Regel Anfangswertaufgaben gerechnet. Dort bestand kein großer Unterschied zwischen Anfangs- und Randwertaufgaben. Bei der numerischen Lösung von DGLn muß unterschieden werden zwischen Anfangs- und Randwertaufgaben. In diesem Abschnitt 10.9 sollen nur Anfangswertaufgaben behandelt werden. Wie bei der numerischen Lösung von Integralen gibt es auch hier verschiedene Methoden, die sich in der Güte unterscheiden. Die numerischen Methoden sollen anhand von DGLn 1. Ordnung erläutert werden und danach auf DGLn n-ter Ordnung erweitert.

10.9.1. Streckenzugverfahren nach Euler (Rechteckregel)

10.9.1.1. Rechteckregel für DGL 1. Ordnung

Die allgemeine DGL 1. Ordnung läßt sich angeben in der Form:

$$y' = f(x,y)$$

Es soll keine Lösungsfunktion $y = f(x)$ berechnet werden, sondern nur y -Werte an bestimmten (Fachausdruck: diskreten) x -Werten. Am verbreitetsten sind Verfahren, wo die x -Werte äquidistant sind, d.h. gleichen Abstand haben. Der Abstand der x -Werte voneinander wird

h - Schrittweite

genannt. Begonnen wird mit (x_0, y_0) . Anschließend wird für den nächsten x -Wert immer die Schrittweite h addiert:

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$$

$$x_3 = x_2 + h = x_1 + 2h = x_0 + 3h$$

$x_{i+1} = x_i + h$

Die Bestimmung der diskreten x -Werte ist somit relativ einfach. Zur Erläuterung des Verfahrens der y -Werte-Berechnung ist die exakte Lösung in Bild MA1091A dargestellt. Bildet man die Tangente im Punkt (x_0, y_0) , erhält man bei x_1 den Wert $y_{1,Rechteck}$. Da die Tangente eine Näherung der exakten Lösungsfunktion ist, stellt auch der Wert $y_{1,Rechteck}$ eine Näherung des exakten Wertes $y_{1,exakt}$ dar.

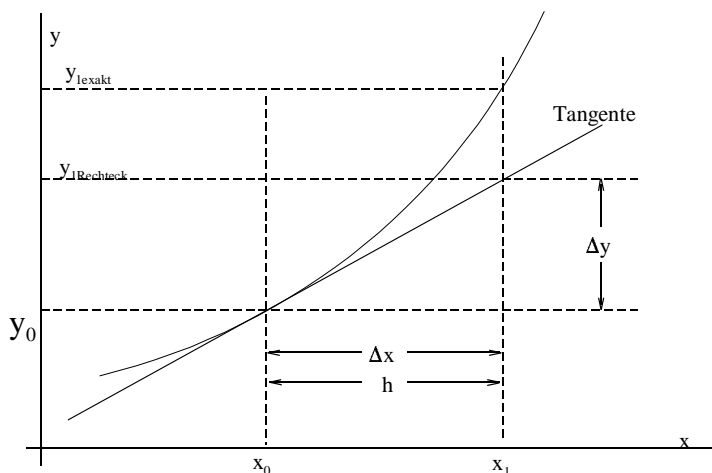


Bild MA1091A

Aus Kap. 5 (MA I) ist die Definition des Differenzenquotienten bekannt, angewandt auf den Punkt (x_0, y_0) ergibt sich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$$

Mit

$$\Delta x = h$$

und

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

kann der Wert y_1 berechnet werden:

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0)$$

Der Wert y' kann aus der gegebenen DGL bestimmt werden, somit ergibt sich:

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0, y_0)$$

Dieses läßt sich auch für den nächsten Bereich berechnen in dem der Index um 1 erhöht wird

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

oder in allgemeiner Form:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) = y_i + h \cdot y'(x_i, y_i)$$

Anstatt der exakten Lösung ergibt sich ein Streckenzug, siehe Bild MA1091B.

Im Bereich zwischen x_i bis $x_i + h$ wird y als Konstante angenommen, deswegen der Name Rechteckregel.

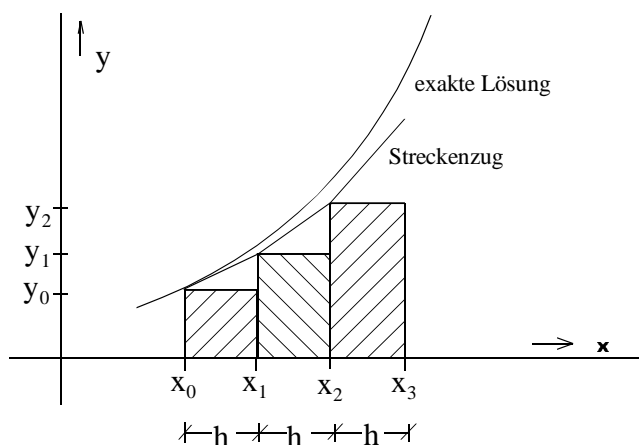


Bild MA1091B

Man sieht aus der Skizze, daß dieses Verfahren nicht sehr genau ist. Bessere Methoden werden noch vorgestellt. Das Prinzip ist aber hier sehr gut erkennbar. Bevor die besseren Verfahren vorgestellt werden, soll die Rechteckregel anhand von Beispielen vertieft werden.

Beispiel 1:

gegeben:	DGL:	$y' + 0.5y = x$	
	Anfangswert:	$y_0 = 4$	
	Schritte:	2	
	Methode:	numerisch, Rechteckregel	
	analytische Lösung:	$y = 8 * e^{-0.5x} + 2x - 4$	(nach Kap. 10.7.1)

gesucht: $y(x=0.8)$

Lösung:

Schrittweite: $h = \frac{0.8}{2} = 0.4$

DGL nach y' umgestellt: $y' = -0.5y + x$

Schritt 0: (Anfangswerte)

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 4$$

Schritt 1:

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.4 = 0.4$$

$$y_1 = y_0 + h * y'(x_0, y_0) = y_0 + h * (-0.5 * y_0 + x_0) = 4 + 0.4 * (-0.5 * 4 + 0) = 3.2$$

$$\Rightarrow y_1 = y(x = x_1 = 0.4) = 3.2$$

Schritt 2:

$$x_2 = x_1 + h = 0.4 + 0.4 = 0.8$$

$$y_2 = y_1 + h * y'(x_1, y_1) = y_1 + h * (-0.5 * y_1 + x_1) = 3.2 + 0.4 * (-0.5 * 3.2 + 0.4) = 2.72$$

$$\Rightarrow y_2 = y(x = x_2 = 0.8) = 2.72$$

Ergebnis: $y(x = 0.8) = 2.72$

Fehler: $y(0.8) - y_{\text{exakt}} = 2.72 - 2.962560 = -0.243$

Beispiel 2: (Studenten)

gegeben: DGL: $y' + 0.5y = x$
 Anfangswert: $y_0 = 4$
 Schritte: 4
 Methode: numerisch, Rechteckregel
 analytische Lösung: $y = 8 * e^{-0.5x} + 2x - 4$ (nach Kap. 10.7.1)

gesucht: $y(x=0.8)$

Ergebnis:

Schritt	x	y
0	0	4.0000
1	0.2	3.6000
2	0.4	3.2800
3	0.6	3.0320
4	0.8	2.8488

Fehler: $y(0.8) - y_{\text{exakt}} = 2.8488 - 2.962560 = -0.114$

10.9.1.2. Rechteckregel für DGLn höherer Ordnung

Die in Abschnitt 10.9.1.1 beschriebene Rechteckregel kann in der angegebenen Form nur für DGLn 1. Ordnung angewandt werden, weil sich der nächste diskrete y -Wert aus der Steigung und der Schrittweite ergibt. Zur Berechnung der Steigung wurde die DGL nach y' aufgelöst. Bei einer DGL höherer Ordnung macht dieses keinen Sinn, weil y' dann von höheren Ableitungen abhängig ist. Ein Ausweg ist die in Kap. 10.8.1 erläuterte Umformung zu einem System von DGLn 1. Ordnung. Die DGL n -ter Ordnung nach $y^{(n)}$ aufgelöst:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

wird mit

$$\begin{aligned} y &= y_1 \\ y' &= y_2 \\ y'' &= y_3 \\ &\dots \\ y^{(n-1)} &= y_n \end{aligned}$$

überführt in das System von n DGLn 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ &\dots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Die Rechteckregel für eine DGL 1. Ordnung lautet:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y'(x_i, y_i)$$

Da in diesem Abschnitt mehrere y_j vorhanden sind, wird der i -te Wert in Klammer gesetzt:

$$y(i+1) = y(i) + h \cdot f[x(i), y(i)] \quad i \text{ entspricht der Schrittzahl}$$

Wendet man die Rechteckregel n mal an, erhält man:

$$\begin{aligned} y_1(i+1) &= y_1(i) + h \cdot y_2 \\ y_2(i+1) &= y_2(i) + h \cdot y_3 \\ y_3(i+1) &= y_3(i) + h \cdot y_4 \\ &\dots \\ y_{n-1}(i+1) &= y_{n-1}(i) + h \cdot y_n \\ y_n(i+1) &= y_n(i) + h \cdot f[x_i, y_1(i), y_2(i), y_3(i), \dots, y_n(i)] \end{aligned}$$

Beispiel 1:

gegeben:	DGL:	$y'' + 4y' + 13y = 40\cos(x)$
	Anfangsbedingung:	$y_0 = 5 \quad y_0' = 0$
	Hinweis:	analytische Lösung in Beispiel 2, Kap. 10.7.2
	analytische Lösung:	$y(x) = e^{-2x}[2\cos(3x) + \sin(3x)] + 3\cos(x) + \sin(x)$
	Lösungsmethode:	numerisch, Streckenzug
	Schritte:	2
gesucht:		$y(x=0.4)$

Lösung:

Schrittweite: $h = \frac{0.4}{2} = 0.2$

DGL nach y'' umgestellt: $y'' = -4y' - 13y + 40\cos(x)$

y und die Ableitungen von y ersetzen: $y_1 = y \quad y_2 = y'$

DGL System aufstellen:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -4y_2 - 13y_1 + 40\cos(x)$$

Nach der Recheckregel umformen:

$$y_1(i+1) = y_1(i) + h*y_2(i)$$

$$y_2(i+1) = y_2(i) + h*[-4*y_2(i) - 13*y_1(i) + 40*\cos(x_0)]$$

Schritt 0: (Anfangswerte)

$$x_0 = 0$$

$$y_1(0) = y_0 = 5$$

$$y_2(0) = y_0' = 0$$

Schritt 1:

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$$

$$y_1(1) = y_1(0) + h*y_2(0) = 5 + h*0 = 5$$

$$y_2(1) = y_2(0) + h*[-4*y_2(0) - 13*y_1(0) + 40*\cos(x_0)] = 0 + 0.2[-4*0 - 13*5 + 40*\cos(0)] = -5.0000$$

Schritt 2:

$$x_2 = x_1 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

$$y_1(2) = y_1(1) + h*y_2(1) = 5 + 0.2*(-5) = 4.0000$$

$$y_2(2) = y_2(1) + h*[-4*y_2(1) - 13*y_1(1) + 40*\cos(x_1)] = -5 + 0.2[-4*(-5) - 13*5 + 40*\cos(0.2)] = -6.1595$$

Ergebnis: $y_1(2) = 4.0 \quad y(x = 0.4) = 4.0 \quad y_{\text{exakt}}(x=0.4) = 3.897029$

Fehler: $y(x=0.4) - y_{\text{exakt}}(x=0.4) = 4.0 - 3.89703 = 0.10297$

Beispiel 2: (Studenten)

gegeben:	DGL:	$y'' + 4y' + 13y = 40\cos(x)$
	Anfangsbedingung:	$y_0 = 5 \quad y_0' = 0$
	analytische Lösung:	$y(x) = e^{-2x}[2\cos(3x) + \sin(3x)] + 3\cos(x) + \sin(x)$
	Lösungsmethode:	numerisch, Streckenzug
	Schritte:	4
	Hinweis:	analytische Lösung in Beispiel 2, Kap. 10.7.2
gesucht:	$y(x=0.4)$	

Ergebnis:

Schritt	x	y
0	0	5
1	0.1	5
2	0.2	4.75
3	0.3	4.348
4	0.4	3.88133

$$y(x = 0.4) = 3.8813$$

$$\text{Fehler: } y(x=0.4) - y_{\text{exakt}}(x=0.4) = 3.88133 - 3.89703 = -0.0157$$

10.9.2. Verbesserte Verfahren

Die Rechteckregel ist sehr anschaulich und schnell programmierbar, aber nicht sehr genau. Es gibt bessere Verfahren, z. B.:

- Trapezregel
- Simpsonregel
- diverse andere
- **Runge-Kutta-Verfahren**

Bei der Rechteck-Regel (y-Wert konstant) wurde mit konstanter Steigung im Intervall zwischen x_i und x_{i+1} gerechnet. Bei den verbesserten Verfahren wird die Steigung mehrfach ausgewertet. Eine Art gewichteter Mittelwert der Steigung ist das Prinzip der verbesserten Verfahren.

Prinzip der Trapez-Regel:

Nach der Rechteck-Regel wird die Steigung im Punkt (x_i, y_i) berechnet. Mit dieser Steigung wird der Wert y_{i+1} wie bei der Rechteck-Regel berechnet. Mit der Steigung im Punkt (x_{i+1}, y_{i+1}) kann der Mittelwert der Steigung im Intervall x_i bis x_{i+1} bestimmt werden. Mit dem Mittelwert der Steigung wird danach der neue y-Wert abgeschätzt.

$$y_i' = f(x_i, y_i) \quad \text{Steigung bei } (x_i, y_i)$$

$$y_A = y_i + h \cdot y_i' \quad \text{Näherung 1. Ordnung für } y(x_{i+1})$$

$$y_{i+1}' = f[x_{i+1}, y_A] \quad \text{Steigung bei } (x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$y_B = y_i + h \cdot y_{i+1}' \quad \text{Näherung mit Steigung an rechter Seite}$$

$$\text{nächsten y-Wert bilden: } y_{i+1} = y_i + \frac{y_A + y_B}{2}$$

10.9.3. Runge-Kutta-Verfahren

Zum schnellen Erkennen des Verhalten eines Kurvenverlaufs wählt man sicher die Rechteckregel. Das Standardverfahren zur numerischen Berechnung von DGLn ist das **Runge-Kutta-Verfahren**. Es gibt verschiedene Runge-Kutta-Verfahren. Standard ist das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung. Auf die theoretische Ableitung wird hier verzichtet, nur das Schema soll angegeben werden. 4. Ordnung heißt, daß der Fehler mit der 4. Potenz der Schrittweite zurückgeht, bei der Rechteck-Regel linear (1. Ordnung, Fehler proportional der Schrittweite) und bei der Trapezregel quadratisch (2. Ordnung, Fehler quadratisch zur Schrittweite).

Prinzip des Runge-Kutta-Verfahrens ist, daß ein aus vier Werten gewichteter Mittelwert der Steigung gebildet wird. Dazu werden vier verschiedene k-Werte (k_1, k_2, k_3, k_4) berechnet, wobei jeweils verschiedene x und y-Werte eingesetzt werden.

Konvention der Schreibweise

Da das Runge-Kutta Verfahren für jeden Schritt, vier Teilschritte vorsieht, wird eine Konvention vereinbart der Nummerierung der Schritte und der Teilschritte.

Die Nummer eines Schrittes erfolgt in Klammern auf gleicher Ebene, als bei der Variablen. Beispiel:

- $x^{(i)} = x_i$ x-Wert an der linken Intervall-Grenze
- $x^{(i+1)} = x_{i+1}$ x-Wert an der rechten Intervall-Grenze
- $y^{(i)} = y_i$ y-Wert an der linken Intervall-Grenze
- $y^{(i+1)} = y_{i+1}$ y-Wert an der rechten Intervall-Grenze

Zur Unterscheidung wird die Nummer eines Teilschrittes in Klammern hochgesetzt. Beispiel:

- $x^{(3)}$ - x-Wert des 3. Teilschrittes
- $y^{(2)}$ - y-Wert des 2. Teilschrittes
- $k^{(3)}$ - k-Wert des 3. Teilschrittes

10.9.3.1. Runge-Kutta-Verfahren für DGL 1. Ordnung

Schema für einen Runge-Kutta-Schritt

- gegebene DGL:** $y' = f(x,y)$
- Anfangswerte:** $x(i), y(i)$
- Verfahren:** $k^{(j)} = h * f[x^{(j)}, y^{(j)}]$ $j = 1 \dots 4$ 4 Teilschritte

j	$x^{(j)} =$	$y^{(j)} =$	$k^{(j)} =$
1	$x^{(1)} = x(i)$	$y^{(1)} = y(i)$	$k^{(1)} = h * y'(x^{(1)}, y^{(1)})$
2	$x^{(2)} = x(i) + h/2$	$y^{(2)} = y(i) + k^{(1)}/2$	$k^{(2)} = h * y'(x^{(2)}, y^{(2)})$
3	$x^{(3)} = x(i) + h/2$	$y^{(3)} = y(i) + k^{(2)}/2$	$k^{(3)} = h * y'(x^{(3)}, y^{(3)})$
4	$x^{(4)} = x(i) + h$	$y^{(4)} = y(i) + k^{(3)}$	$k^{(4)} = h * y'(x^{(4)}, y^{(4)})$

$$k = [k^{(1)} + 2k^{(2)} + 2k^{(3)} + k^{(4)}] / 6$$

$$y(i+1) = y(i) + k \qquad x(i+1) = x(i) + h$$

Beispiel 1:

gegeben:	DGL:	$y' + 0.5y = x$	
	Anfangswert:	$y_0 = 4$	
	Schritte:	2	
	Methode:	Runge-Kutta-Verfahren	
	analytische Lösung:	$y = 8 * e^{-0.5x} + 2x - 4$	(nach Kap. 10.7.1)
gesucht:	$y(x=0.8)$		

Lösung:

Schrittweite: $h = \frac{0.8}{2} = 0.4$

DGL nach y' umgestellt: $y' = -0.5y + x$

Schritt 0: (Anfangswerte)

$$x_0 = 0 \Rightarrow x(0) = 0$$

$$y_0 = 4 \Rightarrow y(0) = 4$$

Schritt 1:

Teilschritt 1: $x^{(1)} = x(0) = 0$

$$y^{(1)} = y(0) = 4$$

$$k^{(1)} = h * y'(x^{(1)}, y^{(1)}) = h * [-0.5 * y^{(1)} + x^{(1)}] = 0.4 * [-0.5 * 4 + 0] = -0.8$$

Teilschritt 2: $x^{(2)} = x(0) + h/2 = 0 + 0.4/2 = 0.2$

$$y^{(2)} = y(0) + k^{(1)}/2 = 4 + (-0.8)/2 = 3.6$$

$$k^{(2)} = h * y'(x^{(2)}, y^{(2)}) = 0.4 * [-0.5 * y^{(2)} + x^{(2)}] = 0.4 * [-0.5 * 3.6 + 0.2] = -0.64$$

Teilschritt 3: $x^{(3)} = x(0) + h/2 = 0 + 0.4/2 = 0.2$

$$y^{(3)} = y(0) + k^{(2)}/2 = 4 + (-0.64)/2 = 3.68$$

$$k^{(3)} = h * y'(x^{(3)}, y^{(3)}) = 0.4 * [-0.5 * y^{(3)} + x^{(3)}] = 0.4 * [-0.5 * 3.68 + 0.2] = -0.656$$

Teilschritt 4: $x^{(4)} = x(0) + h = 0 + 0.4 = 0.4$

$$y^{(4)} = y(0) + k^{(3)} = 4 + (-0.656) = 3.344$$

$$k^{(4)} = h * y'(x^{(4)}, y^{(4)}) = 0.4 * [-0.5 * y^{(4)} + x^{(4)}] = 0.4 * [-0.5 * 3.344 + 0.4] = -0.5088$$

Gesamtschritt 1:

$$k = [k^{(1)} + 2 k^{(2)} + 2 k^{(3)} + k^{(4)}]/6 = [-0.8 + 2 * (-0.64) + 2 * (-0.656) + (-0.5088)]/6 = -0.65013$$

$$x(1) = x(0) + h = 0 + 0.4 = 0.4$$

$$y(1) = y(0) + k = 4 + (-0.65013) = 3.34987$$

$$\Rightarrow y(x=0.4) = 3.34987$$

Schritt 2:

Teilschritt 1: $x^{(1)} = x(1) = 0.4$
 $y^{(1)} = y(1) = 3.34987$
 $k^{(1)} = h \cdot y'(x^{(1)}, y^{(1)}) = h \cdot [-0.5 \cdot y^{(1)} + x^{(1)}] = 0.4 \cdot [-0.5 \cdot 3.34987 + 0.4] = -0.50997$

Teilschritt 2: $x^{(2)} = x(1) + h/2 = 0.4 + 0.4/2 = 0.6$
 $y^{(2)} = y(1) + k^{(1)}/2 = 3.34987 + (-0.50997)/2 = 3.09488$
 $k^{(2)} = h \cdot y'(x^{(2)}, y^{(2)}) = h \cdot [-0.5 \cdot y^{(2)} + x^{(2)}] = 0.4 \cdot [-0.5 \cdot 3.09488 + 0.6] = -0.37898$

Teilschritt 3: $x^{(3)} = x(1) + h/2 = 0.4 + 0.4/2 = 0.6$
 $y^{(3)} = y(1) + k^{(2)}/2 = 3.34987 + (-0.37898)/2 = 3.16038$
 $k^{(3)} = h \cdot y'(x^{(3)}, y^{(3)}) = h \cdot [-0.5 \cdot y^{(3)} + x^{(3)}] = 0.4 \cdot [-0.5 \cdot 3.16038 + 0.6] = -0.39208$

Teilschritt 4: $x^{(4)} = x(1) + h = 0.4 + 0.4 = 0.8$
 $y^{(4)} = y(1) + k^{(3)} = 3.34987 + (-0.39208) = 2.95779$
 $k^{(4)} = h \cdot y'(x^{(4)}, y^{(4)}) = h \cdot [-0.5 \cdot y^{(4)} + x^{(4)}] = 0.4 \cdot [-0.5 \cdot 2.95779 + 0.8] = -0.27156$

Gesamtschritt 2:

$$k = [k^{(1)} + 2 k^{(2)} + 2 k^{(3)} + k^{(4)}]/6 = [-0.50997 + 2 \cdot (-0.37898) + 2 \cdot (-0.39208) + (-0.27156)] = -0.38727$$

$$x(2) = x(1) + h = 0.4 + 0.4 = 0.8$$

$$y(2) = y(1) + k = 3.34987 + (-0.38727) = 2.96259$$

$$\Rightarrow y(x=0.8) = 2.96259$$

Fehler: $y(x=0) - y_{\text{exakt}} = 2.9625942 - 2.9625604 = 0.0000336$

Beispiel 2: (Studenten)

gegeben: DGL: $y' + 0.5y = x$
Anfangswert: $y_0 = 4$
Teilschritte: 1
Methode: Runge-Kutta-Verfahren
analytische Lösung: $y = 8 \cdot e^{-0.5x} + 2x - 4$ (nach Kap. 10.7.1)

gesucht: $y(x=0.8)$

Ergebnis: $k^{(1)} = -1.6$
 $k^{(2)} = -0.96$
 $k^{(3)} = -1.088$
 $k^{(4)} = -0.5248$
 $k = -1.0368$

$$y(x=0.8) = 2.963200$$

Fehler: $y(x=0) - y_{\text{exakt}} = 2.963200 - 2.9625604 = 0.000640$

10.9.3.2. Runge-Kutta-Verfahren für DGLn höherer Ordnung

Wie bei der Rechteck-Regel wird auch hier die DGL n-ter Ordnung umgeformt in ein System von n DGLn 1. Ordnung. Die DGL n-ter Ordnung nach $y^{(n)}$ aufgelöst:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, x^{(n-1)'})$$

wird mit

$$\begin{aligned} y &= y_1 \\ y' &= y_2 \\ y'' &= y_3 \\ &\dots \\ y^{(n-1)} &= y_n \end{aligned}$$

überführt in das System von n-DGL n 1. Ordnung (siehe Kap. 10.8.1):

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ &\dots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Das obere System kann in Vektor-Schreibweise angegeben werden:

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y})$$

mit

$$\bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \bar{f}(x, \bar{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \\ f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Auf die obere Vektor-DGL kann das Runge-Kutta-Verfahren in gleicher Weise angewandt werden als bei DGLn 1. Ordnung auf y (siehe Abschnitt 10.9.3.1).

Schema für einen Runge-Kutta-Schritt

gegeben: DGL: $\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y})$

Anfangswerte: $x(i), \bar{y}(i)$

Verfahren: $\bar{k}^{(j)} = h * f[x^{(j)}, \bar{y}^{(j)}]$ $j = 1 \dots 4$

4 Teilschritte

j	$x^{(j)} =$	$\bar{y}^{(j)} =$	$\bar{k}^{(j)} =$
1	$x^{(1)} = x(i)$	$\bar{y}^{(1)} = \bar{y}(i)$	$\bar{k}^{(1)} = h * \bar{y}'(x^{(1)}, \bar{y}^{(1)})$
2	$x^{(2)} = x(i) + h/2$	$\bar{y}^{(2)} = \bar{y}(i) + \bar{k}^{(1)}/2$	$\bar{k}^{(2)} = h * \bar{y}'(x^{(2)}, \bar{y}^{(2)})$
3	$x^{(3)} = x(i) + h/2$	$\bar{y}^{(3)} = \bar{y}(i) + \bar{k}^{(2)}/2$	$\bar{k}^{(3)} = h * \bar{y}'(x^{(3)}, \bar{y}^{(3)})$
4	$x^{(4)} = x(i) + h$	$\bar{y}^{(4)} = \bar{y}(i) + \bar{k}^{(3)}$	$\bar{k}^{(4)} = h * \bar{y}'(x^{(4)}, \bar{y}^{(4)})$

$$\bar{k} = [\bar{k}^{(1)} + 2\bar{k}^{(2)} + 2\bar{k}^{(3)} + \bar{k}^{(4)}]/6$$

$$\bar{y}(i+1) = \bar{y}(i) + \bar{k} \quad x(i+1) = x(i) + h$$

Beispiel 1:

gegeben: DGL: $y'' + 4y' + 13y = 40\cos(x)$

Anfangsbedingung $y_0 = 5 \quad y_0' = 0$

Hinweis: analytische Lösung in Beispiel 2, Kap. 10.7.2

analytische Lösung: $y(x) = e^{-2x}[2\cos(3x) + \sin(3x)] + 3\cos(x) + \sin(x)$

Lösungsmethode: numerisch, Runge-Kutta-Verfahren

Schritte: 2

gesucht: $y(x=0.4)$

Lösung:

Schrittweite: $h = \frac{0.4}{2} = 0.2$

DGL nach y'' umgestellt: $y'' = -4y' - 13y + 40\cos(x)$

y und die Ableitungen von y ersetzen: $y_1 = y \quad y_2 = y'$

DGL System aufstellen: $y_1' = y_2$
 $y_2' = -4*y_2 - 13*y_1 + 40*\cos(x)$

k-Werte angeben: $k_1 = h*y_1' = h*y_2$
 $k_2 = h*y_2' = h*[-4*y_2 - 13*y_1 + 40*\cos(x)]$

Schritt 0: (Anfangswerte)

$x(0) = 0$
 $y_1(0) = y_0 = 5$
 $y_2(0) = y_0' = 0$

Schritt 1:**Teilschritt 1:**

$$x^{(1)} = x(0) = 0$$

$$y_1^{(1)} = y_1(0) = 5$$

$$y_2^{(1)} = y_2(0) = 0$$

$$k_1^{(1)} = h \cdot y_2^{(1)} = 0.2 \cdot 0 = 0$$

$$k_2^{(1)} = h \cdot [-4y_2^{(1)} - 13y_1^{(1)} + 40 \cdot \cos(x^{(1)})] = 0.2 \cdot [-4 \cdot 0 - 13 \cdot 5 + 40 \cdot \cos(0)] = -5$$

Teilschritt 2:

$$x^{(2)} = x(0) + h/2 = 0 + 0.2/2 = 0.1$$

$$y_1^{(2)} = y_1(0) + k_1^{(1)}/2 = 5 + 0/2 = 5$$

$$y_2^{(2)} = y_2(0) + k_2^{(1)}/2 = 0 + (-5)/2 = -2.5$$

$$k_1^{(2)} = h \cdot y_2^{(2)} = 0.2 \cdot (-2.5) = -0.5$$

$$k_2^{(2)} = h \cdot [-4y_2^{(2)} - 13y_1^{(2)} + 40 \cdot \cos(x^{(2)})] = 0.2 \cdot [-4(-2.5) - 13 \cdot 5 + 40 \cdot \cos(0.1)] = -3.03997$$

Teilschritt 3:

$$x^{(3)} = x(0) + h/2 = 0 + 0.2/2 = 0.1$$

$$y_1^{(3)} = y_1(0) + k_1^{(2)}/2 = 5 + (-0.5)/2 = 4.75$$

$$y_2^{(3)} = y_2(0) + k_2^{(2)}/2 = 0 + (-3.03997)/2 = -1.51998$$

$$k_1^{(3)} = h \cdot y_2^{(3)} = 0.2 \cdot (-1.51998) = -0.30400$$

$$k_2^{(3)} = h \cdot [-4y_2^{(3)} - 13y_1^{(3)} + 40 \cdot \cos(x^{(3)})] = 0.2 \cdot [-4(-1.51998) - 13 \cdot 4.75 + 40 \cdot \cos(0.1)] = -3.17398$$

Teilschritt 4:

$$x^{(4)} = x(0) + h = 0 + 0.2 = 0.2$$

$$y_1^{(4)} = y_1(0) + k_1^{(3)} = 5 + (-0.30400) = 4.69600$$

$$y_2^{(4)} = y_2(0) + k_2^{(3)} = 0 + (-3.17398) = -3.17398$$

$$k_1^{(4)} = h \cdot y_2^{(4)} = 0.2 \cdot (-3.17398) = -0.63480$$

$$k_2^{(4)} = h \cdot [-4y_2^{(4)} - 13y_1^{(4)} + 40 \cdot \cos(x^{(4)})] = 0.2 \cdot [-4(-3.17398) - 13 \cdot 4.69600 + 40 \cdot \cos(0.2)] = -1.82989$$

Gesamtschritt 1:

$$k_1 = [k_1^{(1)} + 2k_1^{(2)} + 2k_1^{(3)} + k_1^{(4)}]/6 = -0.37380$$

$$k_2 = [k_2^{(1)} + 2k_2^{(2)} + 2k_2^{(3)} + k_2^{(4)}]/6 = -3.20963$$

$$x(1) = x(0) + h = 0.2$$

$$y_1(1) = y_1(0) + k_1 = 4.62620$$

$$y_2(1) = y_2(0) + k_2 = -3.20963$$

$$\Rightarrow y(x=0.2) = 4.62620$$

Schritt 2:**Teilschritt 1:**

$$x^{(1)} = x(1) = 0.2$$

$$y_1^{(1)} = y_1(1) = 4.6262$$

$$y_2^{(1)} = y_2(1) = -3.20963$$

$$k_1^{(1)} = h \cdot y_2^{(1)} = -0.64193$$

$$k_2^{(1)} = h \cdot [-4y_2^{(1)} - 13y_1^{(1)} + 40 \cdot \cos(x^{(1)})] = -1.61989$$

Teilschritt 2:

$$x^{(2)} = x(1) + h/2 = 0.2 + 0.2/2 = 0.3$$

$$y_1^{(2)} = y_1(1) + k_1^{(1)}/2 = 4.30524$$

$$y_2^{(2)} = y_2(1) + k_2^{(1)}/2 = -4.01957$$

$$k_1^{(2)} = h \cdot y_2^{(2)} = -0.80391$$

$$k_2^{(2)} = h \cdot [-4y_2^{(2)} - 13y_1^{(2)} + 40 \cdot \cos(x^{(2)})] = -0.33527$$

Teilschritt 3:

$$x^{(3)} = x(1) + h/2 = 0.2 + 0.2/2 = 0.3$$

$$y_1^{(3)} = y_1(1) + k_1^{(2)}/2 = 4.22424$$

$$y_2^{(3)} = y_2(1) + k_2^{(2)}/2 = -3.37727$$

$$k_1^{(3)} = h \cdot y_2^{(3)} = -0.67545$$

$$k_2^{(3)} = h \cdot [-4y_2^{(3)} - 13y_1^{(3)} + 40 \cdot \cos(x^{(3)})] = -0.63853$$

Teilschritt 4:

$$x^{(4)} = x(1) + h = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

$$y_1^{(4)} = y_1(1) + k_1^{(3)} = 3.95075$$

$$y_2^{(4)} = y_2(1) + k_2^{(3)} = -3.84816$$

$$k_1^{(4)} = h \cdot y_2^{(4)} = -0.76963$$

$$k_2^{(4)} = h \cdot [-4y_2^{(4)} - 13y_1^{(4)} + 40 \cdot \cos(x^{(4)})] = 0.17507$$

Gesamtschritt 2:

$$k_1 = [k_1^{(1)} + 2k_1^{(2)} + 2k_1^{(3)} + k_1^{(4)}]/6 = -0.72838$$

$$k_2 = [k_2^{(1)} + 2k_2^{(2)} + 2k_2^{(3)} + k_2^{(4)}]/6 = -0.56540$$

$$x(2) = x(1) + h = 0.4$$

$$y_1(2) = y_1(1) + k_1 = 3.89782$$

$$y_2(2) = y_2(1) + k_2 = -3.77503$$

$$\Rightarrow y(x=0.4) = 3.89782$$

$$\text{Fehler: } y(x=0.4) - y_{\text{exakt}}(0.4) = 3.89782 - 3.89703 = 0.00079$$

Beispiel 2: (Studenten)

gegeben:	DGL:	$y'' + 4y' + 13y = 40\cos(x)$
	Anfangsbedingung	$y_0 = 5 \quad y_0' = 0$
	Hinweis:	analytische Lösung in Beispiel 2, Kap. 10.7.2
	analytische Lösung:	$y(x) = e^{-2x}[2\cos(3x) + \sin(3x)] + 3\cos(x) + \sin(x)$
	Lösungsmethode:	numerisch, Runge-Kutta-Verfahren
	Schritte:	1
gesucht:	$y(x=0.4)$	

Ergebnis:	$k_1^{(1)} = 0$	$k_2^{(1)} = -10$
	$k_1^{(2)} = -2$	$k_2^{(2)} = -2.31893$
	$k_1^{(3)} = -0.46379$	$k_2^{(3)} = -3.26379$
	$k_1^{(4)} = -1.30551$	$k_2^{(4)} = -3.62927$
	$k_1 = -1.03885$	$k_2 = -4.13245$

$$\Rightarrow y(x=0.4) = 3.96115$$

Fehler: $y(x=0.4) - y_{\text{exakt}}(0.4) = 3.96155 - 3.89703 = 0.06452$

10.9.4. Hinweise

10.9.4.1. Wahl des Verfahrens

Um die Lösungskurve einer DGL in etwa abzuschätzen ist das Streckenzugverfahren geeignet, weil der Rechenaufwand gering ist und die Programmierung einfach ist. Zum exakten Berechnen einer DGL ist das Runge-Kutta Verfahren geeignet. Nachteil: hoher Rechen- und Programmieraufwand. Das Runge-Kutta-Verfahren ist für Online-Berechnungen wegen der höheren Rechenzeit nicht besonders geeignet. In Online-Simulationen wird häufig die Trapezregel eingesetzt. Bei linearen Systemen kann mit Hilfe einer Transitionsmatrix der Zeitverlauf auch exakt berechnet werden (siehe Kap. 11.9.2). Der Aufwand besteht hierbei eine Transitionsmatrix \underline{M}_{Tr} zu berechnen, mit Runge Kutta möglich.

$$\underline{y}(i+1) = \underline{M}_{Tr} * \underline{y}(i) + \underline{M}_2 * \underline{f}(x)$$

10.9.4.2. Wahl der Schrittweite

Dafür gibt es in der Literatur Berechnungshinweise. Praktischer Tip: Berechnung mit halber Schrittweite durchzuführen. Falls sich im Verlauf der Variablen keine signifikanten Änderungen ergeben, ist die Berechnung als richtig anzusehen (kein mathematischer Beweis).

Wird die Schrittweite sehr sehr klein, müssen sehr sehr viele Additionen durchgeführt werden, dieses führt zum sogenannten Additionsfehler.

Die Schrittweite ist vom Typ der DGL und deren Zahlenwerten abhängig. Bei den meisten DGLn darf die Schrittweite mehrere Zehnerpotenzen überstreichen. Kleine Schrittweiten bedingen viele Schritte, dieses kostet Rechenzeit.

10.9.4.3. Programmierung

Die numerischen Berechnungen der in diesem Kapitel 10.9 aufgezeigten Beispiele werden in der Praxis nicht von Hand ausgeführt. Die Beispiele zeigen aber sehr gut die durchzuführenden Schritte, die in der Praxis mit Hilfe eines Rechners in Hochsprache programmiert werden. Dabei ist auf eine strukturierte Programmierung mit Unterprogrammen und Modulen zu achten. Vielfach wird schon Software angeboten, wo dann nur noch die DGL mit Anfangswerten eingegeben wird. Evtl. muß dabei noch die DGL n-ter Ordnung in ein System von DGLn 1. Ordnung überführt werden.

10.9.4.4. Nichtlineare DGLn

In den Beispielen in diesem Abschnitt 10.9 wurden nur lineare DGLn numerisch behandelt, weil die berechneten Werte mit der analytischen Lösung verglichen werden sollten. Die Hauptanwendung für numerische Lösungsmethoden liegt auf dem Gebiet der nichtlinearen DGLn, in der Regel höherer Ordnung, die meist analytisch nicht lösbar sind.

10.10. Lösung einer DGL mit Hilfe eines Reihenansatzes

Auch mit Hilfe eines geeigneten Reihenansatzes kann eine DGL gelöst werden. Hier soll nur der Potenzreihenansatz behandelt werden.

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$	Potenzreihenansatz
$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$	Potenzreihenansatz

Prinzip des Verfahrens

Der Reihenansatz

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

wird n mal abgeleitet

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \dots$$

.....

$$y''' = \dots\dots\dots$$

und in die gegebene DGL n-ter Ordnung eingesetzt:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Mit den Anfangs- oder Randbedingungen lassen sich die Koeffizienten a_i bestimmen. Am einfachsten ist dieses am Beispiel ersichtlich. Es gibt jeweils zwei Möglichkeiten: Die Reihe als Summenformel anzugeben oder die Reihe aufzuzählen. Der Anfänger kommt besser mit der Aufzählung zu Recht. Um die Koeffizienten allgemein zu bestimmen, sollte die Summenformel verwendet werden. Beide Methoden sollen jeweils an zwei Beispielen aufgezeigt werden.

Beispiel 1:

gegeben: DGL: $y' + y = 0$
 Anfangswert: $y(x=0) = 1$
analytische Lösung: $y = e^{-x}$

gesucht: Lösung mittels Reihenansatz

Lösung:

Potenzreihenansatz: $y = a_0 + a_1*x + a_2*x^2 + a_3*x^3 + a_4*x^4 + ..$

Differenzieren: $y' = a_1 + 2a_2*x + 3a_3*x^2 + 4a_4*x^3 + ...$

Addition von $y' + y$ damit DGL erfüllt ist:

$$y' + y = 0 = (a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + (a_3 + 4a_4)x^3 + ...$$

Die obere Gleichung ist nur dann für alle x erfüllt, wenn alle Koeffizienten der x -Potenzen (obere Klammerausdrücke) Null werden:

$$\begin{array}{lll} a_0 + a_1 = 0 & \Rightarrow & a_1 = -a_0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 & \Rightarrow & a_2 = -\frac{1}{2}a_1 \\ a_2 + 3a_3 = 0 & \Rightarrow & a_3 = -\frac{1}{3}a_2 \\ a_3 + 4a_4 = 0 & \Rightarrow & a_4 = -\frac{1}{4}a_3 \end{array}$$

Wäre a_0 bekannt, könnten die anderen Koeffizienten rekursiv bestimmen werden. Der Koeffizient a_0 wird über die Anfangsbedingung bestimmt:

$$y(x=0) = 1 = a_0$$

Damit lassen sich die anderen Koeffizienten bestimmen:

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_0 = -1 \\ a_2 &= -\frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \\ a_3 &= -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{6} \\ a_4 &= -\frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Die Reihe als Lösung kann damit angegeben werden:

$$y(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - + ...$$

Beispiel 2:

gegeben: DGL: $y' + 2y = 18$
 Anfangswert: $y(x=0) = 0$
analytische Lösung: $y = 9 \cdot (1 - e^{-2x})$

gesucht: Lösung mittels Reihenansatz

Lösung:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + 4a_4 \cdot x^3 + \dots$$

$$2y = 2a_0 + 2a_1 \cdot x + 2a_2 \cdot x^2 + 2a_3 \cdot x^3 + 2a_4 \cdot x^4 + \dots$$

$$y' + 2y - 18 = 0$$

$$(a_1 + 2a_0 - 18) + (2a_2 + 2a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + (4a_4 + 2a_3)x^3 + \dots = 0$$

Anfangsbedingung: $y(x=0) = 0 = a_0$

Koeffizientenvergleich der x -Potenzen:

$$\begin{array}{lll} a_1 + 2a_0 - 18 = 0 & \Rightarrow & a_1 = 18 - 2a_0 = 18 - 2 \cdot 0 = 18 \\ 2a_2 + 2a_1 = 0 & \Rightarrow & a_2 = -a_1 = -18 \\ 3a_3 + 2a_2 = 0 & \Rightarrow & a_3 = -\frac{2}{3}a_2 = -\frac{2}{3}(-18) = 12 \\ 4a_4 + 2a_3 = 0 & \Rightarrow & a_4 = -\frac{1}{2}a_3 = -\frac{1}{2} \cdot 12 = -6 \end{array}$$

Ergebnis durch Einsetzen der a_i in den Reihenansatz:

$$y(x) = 18x - 18x^2 + 12x^3 - 6x^4 + \dots$$

Beispiel 3:

gegeben: DGL: $y' + y = 3e^{-2x}$
 Anfangswert: $y(x=0) = 0$
analytische Lösung: $y = 3(e^{-x} - e^{-2x})$

gesucht: Lösung mittels Reihenansatz

Lösung:

$$-3 * e^{-2x} = -3 \left[1 + \frac{(-2x)}{1} + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{6} + \frac{(-2x)^4}{24} + \dots \right]$$

$$-3 * e^{-2x} = -3 + 6x - 6x^2 + 4x^3 - 2x^4 + \dots$$

$$y = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + a_3 * x^3 + a_4 * x^4 + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 * x + 3a_3 * x^2 + 4a_4 * x^3 + \dots$$

$$y' + y - 3e^{-2x} = 0$$

$$(a_0 + a_1 - 3) + (a_1 + 2a_2 + 6)x + (a_2 + 3a_3 - 6)x^2 + (a_3 + 4a_4 + 4)x^3 + \dots = 0$$

$$a_0 = 0$$

(Aus A.B)

$$a_0 + a_1 - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 = -a_0 + 3 = -0 + 3 = 3$$

$$a_1 + 2a_2 + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(-6 - a_1) = \frac{1}{2}(-6 - 3) = -4.5$$

$$a_2 + 3a_3 - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$a_3 = \frac{1}{3}(6 - a_2) = \frac{1}{3}(6 + 4.5) = 3.5$$

$$a_3 + 4a_4 + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$a_4 = \frac{1}{4}(-4 - a_3) = \frac{1}{4}(-4 - 3.5) = -1.875$$

Ergebnis durch Einsetzen der a_i in den Reihenansatz:

$$y(x) = 3x - 4.5x^2 + 3.5x^3 - 1.875x^4 + \dots$$

Beispiel 4:

gegeben: DGL: $y' + y = 0$
 Anfangswert: $y(x=0) = 1$
analytische Lösung: $y = e^{-x}$

gesucht: Lösung mittels Reihenansatz als Summenformel

Lösung:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i * x^i$$

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} i * a_i * x^{i-1} \quad i - 1 = k, i = k + 1$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) * a_{k+1} * x^k \quad k \rightarrow i$$

$$y' = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) * a_{i+1} * x^i$$

$$y' + y = 0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) * a_{i+1} * x^i + \sum_{i=0}^{\infty} a_i * x^i = 0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(i+1) * a_{i+1} + a_i] x^i = 0$$

$$(i+1) a_{i+1} + a_i = 0 \quad i = 0 \dots \infty$$

$$a_{i+1} = -\frac{a_i}{i+1}$$

$$\text{A.B.} \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1$$

$$i = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{0+1} = a_1 = -\frac{a_0}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$i = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{1+1} = a_2 = -\frac{a_1}{1+1} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$i = 2 \quad \Rightarrow \quad a_{2+1} = a_3 = -\frac{a_2}{2+1} = \frac{-1/2}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$i = 3 \quad \Rightarrow \quad a_{3+1} = a_4 = -\frac{a_3}{3+1} = \frac{-1/6}{4} = \frac{1}{24}$$

$$a_i = (-1)^i \frac{1}{i!}$$

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!} * x^i$$

Beispiel 5: (Ansatz ohne Summenformel)

gegeben:	DGL:	$y = -y''$
	Anfangswerte:	$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$
	analytische Lösung:	$y(x) = \cos(x)$
	Potenzreihenansatz:	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \dots$

Lösung:

$$y \text{ zwei mal ableiten: } \begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \dots \\ y'' &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Anfangswerte auswerten: } y(x=0) = 1 &\quad \Rightarrow \quad a_0 = 1 \quad \text{aus Vergleich der Reihe für } y \\ y'(x=0) = 0 &\quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \quad \text{aus Vergleich der Reihe für } y' \end{aligned}$$

in DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} y + y'' &= 0 \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \dots + 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \dots &= 0 \end{aligned}$$

Das Prinzip bei Potenzreihenansatz ist, daß nach Einsetzen in die DGL die Koeffizienten der x-Potenzen zu Null werden, damit die DGL für alle x erfüllt ist. Somit erfolgt eine Sortierung nach x-Potenzen:

$$(a_0 + 2a_2) + (a_1 + 6a_3)x + (a_2 + 12a_4)x^2 + (a_3 + 20a_5)x^3 + (a_4 + 30a_6)x^4 + \dots = 0$$

Um die DGL zu erfüllen müssen alle Klammerausdrücke zu Null werden. Daraus lassen sich dann die Koeffizienten berechnen:

$$a_0 + 2a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{2}a_0 = -\frac{1}{2} * 1 = -\frac{1}{2}$$

$$a_1 + 6a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{6}a_1 = -\frac{1}{6} * 0 = 0$$

$$a_2 + 12a_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}$$

$$a_3 + 20a_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_5 = -\frac{1}{20}a_3 = 0$$

$$a_4 + 30a_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_6 = -\frac{1}{30}a_4 = -\frac{1}{720}$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots$$

Dieses ist der bekannte Anfang der Kosinus-Reihe (2. Semester!). Man könnte also die cos-Funktion (wie auch sin(x), sinh(x), cosh(x), e^x) als Lösung einer DGL mit bestimmten Anfangsbedingungen definieren. Wobei sin und cos noch geometrische Bedeutung haben. Die Mathematiker kennen noch eine Vielzahl von Funktionen, die sich als Lösungen von DGLn ergeben. Sonderlich bekannt sind die Funktionen nicht. Am bekanntesten ist noch die Bessel-Funktion, die anhand von Beispiel 3 untersucht werden soll.

Beispiel 6: (Ansatz als Summenformel)

gegeben: DGL: $y + y'' = 0$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$

Lösung:

Reihenansatz: $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i * x^i$

Ableitung: $y' = \sum_{i=1}^{\infty} i * a_i * x^{(i-1)}$

$$y'' = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) * a_i * x^{(i-2)} \quad j = i - 2 \quad i = j + 2$$

$$y'' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} * x^j \quad i = j$$

$$y'' = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) * a_{i+2} * x^i$$

Einsetzen die DGL:

$$\sum_{i=0}^{\infty} [a_i + (i+2)(i+1)a_{i+2}]x^i = 0$$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$
 $y'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

Koeffizienten der x Potenzen gleich Null setzen:

$$a_i + (i+2)(i+1)a_{i+2} = 0$$

$$a_{i+2} = -\frac{a_i}{(i+1)(i+2)}$$

$$i = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{(0+1)*(0+2)} = -\frac{1}{2}$$

$$i = 1 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{(1+1)(1+2)} = \frac{0}{2*3} = 0$$

$$i = 2 \Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{(2+1)(2+2)} = -\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{3*4} = \frac{1}{24}$$

$$i = 3 \Rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{(3+1)(3+2)} = 0$$

$$i = 4 \Rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{(4+1)(4+2)} = -\frac{1}{72}$$

Beispiel 7: (Ansatz ohne Summenformel)

gegeben: Bessel-DGL: $y'' + \frac{y'}{x} + q^2 \cdot y = 0$

Anfangsbedingung: $y(x=0) = 1$

Lösung:

Ansatz: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$

Ableitungen: $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \dots$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \dots$$

In die DGL einsetzen: $y'' + \frac{y'}{x} + q^2 \cdot y = 0$

$$\begin{aligned} & (2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \dots) \\ & + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \dots) / x \\ & + q^2 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{a_1}{x} + (2a_2 + 2a_2 + q^2a_0) + (6a_3 + 3a_3 + q^2a_1)x + (12a_4 + 4a_4 + q^2a_2)x^2 + (20a_5 + 5a_5 + q^2a_3)x^3 + \dots = 0$$

Anfangsbedingung: $y(x=0) = 1 = a_0 = 1$ aus Ansatz

Koeffizientenvergleich:

$$x^{-1} \Rightarrow a_1 = 0$$

$$x^0 \Rightarrow q^2 \cdot a_0 + 4a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{q^2}{4}a_0 = -\frac{q^2}{4}$$

$$x^1 \Rightarrow q^2 \cdot a_1 + 9a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{q^2}{9}a_1 = 0$$

$$x^2 \Rightarrow q^2 \cdot a_2 + 16a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{q^2}{16}a_2 = \frac{q^4}{4 \cdot 16}$$

$$x^3 \Rightarrow q^2 \cdot a_3 + 25a_5 = 0 \Rightarrow a_5 = -\frac{q^2}{25}a_3 = 0$$

$$x^4 \Rightarrow q^2 \cdot a_4 + 36a_6 = 0 \Rightarrow a_6 = -\frac{q^2}{36}a_4 = -\frac{q^6}{4 \cdot 16 \cdot 36}$$

$$y(x) = 1 - \frac{q^2 \cdot x^2}{4} + \frac{q^4 \cdot x^4}{4 \cdot 16} - \frac{q^6 \cdot x^6}{4 \cdot 16 \cdot 36} + \dots$$

$$y(x) = 1 - \left(\frac{q \cdot x}{2}\right)^2 + \frac{(q \cdot x)^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{(q \cdot x)^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots$$

Beispiel 8: (Ansatz mit Summenformel)

gegeben: DGL: $y'' + \frac{y'}{x} + q^2 \cdot y = 0$
 Anfangsbedingung: $y(x=0) = 1$

Lösung:

Ansatz:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$$

2 mal ableiten: $y' = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i \cdot x^{i-1}$

$$y'' = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i \cdot x^{i-2} \quad i-2=j \quad i=j+2$$

$$\frac{y'}{x} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i \cdot x^{i-2}$$

Index ersetzen: $y'' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} \cdot x^j = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) a_{i+2} \cdot x^i$

$$\frac{y'}{x} = \sum_{j=-1}^{\infty} (j+2) a_{j+2} \cdot x^j = \sum_{i=-1}^{\infty} (i+2) a_{i+2} \cdot x^i = \frac{a_1}{x} + \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) a_{i+2} \cdot x^i$$

$$y'' + \frac{y'}{x} + q^2 \cdot y = 0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) a_{i+2} \cdot x^i + \frac{a_1}{x} + \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) a_{i+2} \cdot x^i + q^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i = 0$$

$$\frac{a_1}{x} + \sum_{i=0}^{\infty} [(i+2)(i+1) + (i+2)] a_{i+2} + q^2 \cdot a_i \cdot x^i = 0$$

$$\frac{a_1}{x} + \sum_{i=0}^{\infty} [(i+2)^2 \cdot a_{i+2} + q^2 \cdot a_i] x^i = 0 \quad (\text{A})$$

Aus dem Koeffizienten der x-Potenzen gleich Null setzen:

$$(i+2)^2 \cdot a_{i+2} + q^2 \cdot a_i = 0$$

und Umformung lassen sich die a_i rekursiv berechnen:

$$a_{i+2} = -\frac{q^2}{(i+2)^2} a_i \quad (\text{B})$$

Die eine Anfangsbedingung läßt sich aus der Reihe für y bestimmen:

$$y(x=0) = a_0 = 1$$

Die andere Anfangsbedingung läßt sich aus (A) ablesen: Es tritt nur ein Term mit der Potenz x^{-1} auf. Damit die Gleichung (A) erfüllt ist, muß a_1 Null werden:

$$a_1 = 0$$

Aus der rekursiven Formel (B) ergibt sich somit:

$$a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_7 = 0 \dots \dots$$

Somit kann die Reihe für y angegeben werden:

$$y(x) = \sum_{i=0,2,4,6,8,\dots}^{\infty} a_i * x^i \quad i = 2k$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} * x^{2k} \quad (C)$$

Mit (B) und $i = 2k$ ergibt sich:

$$a_{2k+2} = -\frac{q^2}{(2k+2)^2} a_{2k} \quad (D)$$

Es muß versucht werden, den rekursiven Ausdruck (D) in einen nicht rekursiven umzuformen. Dazu werden die ersten Terme von a_{k2} entwickelt, woraus versucht, wird das Bildungsgesetz zu bekennen. Aus (D) ergibt sich mit $a_0 = 1$:

$$k = 0$$

$$a_{2*0+2} = a_2 = -\frac{q^2}{(2*0+2)^2} * a_0 = -\frac{q^2}{2^2}$$

$$k = 1$$

$$a_{2*1+2} = a_4 = -\frac{q^2}{(2*1+2)^2} * a_2 = \left(-\frac{q^2}{4^2}\right) * \left(-\frac{q^2}{2^2}\right) = \frac{q^4}{2^2*4^2}$$

$$k = 2$$

$$a_{2*2+2} = a_6 = -\frac{q^2}{(2*2+2)^2} * a_4 = -\frac{q^2}{6^2} * \frac{q^4}{2^2*4^2} = -\frac{q^6}{2^2*4^2*6^2}$$

$$k = 3$$

$$a_{2*3+2} = a_8 = -\frac{q^2}{(2*3+2)^2} * a_6 = -\frac{q^2}{8^2} * \frac{-q^6}{2^2*4^2*6^2} = \frac{q^8}{2^2*4^2*6^2*8^2}$$

$$a_8 = \frac{q^8}{2^2*4^2*6^2*8^2} = \frac{q^8}{2^2*1^2 + 2^2*2^2 + 2^2*3^2 + 2^2*4^2} = \frac{q^8}{(2^2)^4*(1*2*3*4)^2} = \frac{(q^2)^4}{4^4(4!)^2}$$

$$a_{2*4} = \frac{(q^2)^4}{4^4(4!)^2}$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{q^{2k}}{2^{2k}[k!]^2} \quad (E)$$

Mit (E) in (C) eingesetzt, kann $y(x)$ als Summenformel angegeben werden:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{q^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$$

$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{q \cdot x}{2}\right)^{2k}}{[(k!)]^2}$	Bessel-Funktion 1. Ordnung 1. Art
--	-----------------------------------

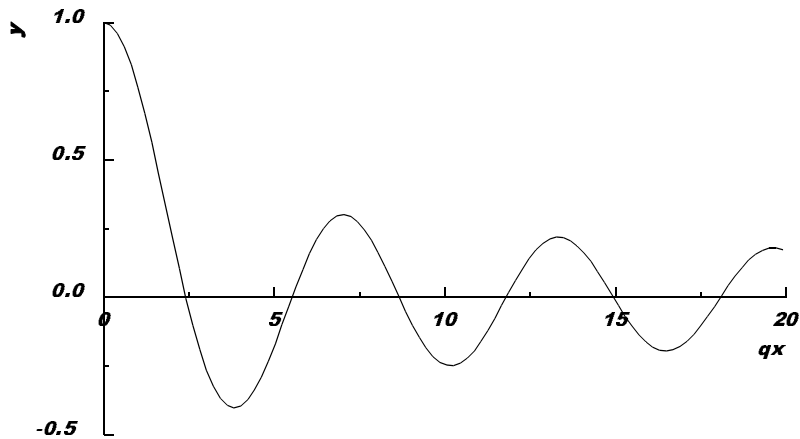


Bild MA1010A: Bessel-Funktion 1. Ordnung, 1. Art

Bild MA1010A zeigt die Lösung der oben gegebenen Bessel-DGL. Die dargestellte Bessel-Funktion hat abklingende Amplituden mit veränderlicher Periodendauer. Mit Bessel-Funktionen kann wie z.B. mit trigonometrischen Funktionen gearbeitet werden. Es gibt Ableitungsregeln. Wenn für $x=0$ kein Wert definiert ist, ergeben sich die Bessel-Funktionen 2. Art mit negativen x -Potenzen. Bessel Funktionen treten in der Praxis bei zylindersymmetrischen Anordnungen (z.B. Temperaturverteilung in einem Zylinder) auf. Auch die Stromverdrängung in einem Rundleiter lässt sich mit einer allerdings komplexen Bessel-Funktionen berechnen. Auch die Seitenbänder bei FM lassen sich mit Bessel-Funktionen berechnen.

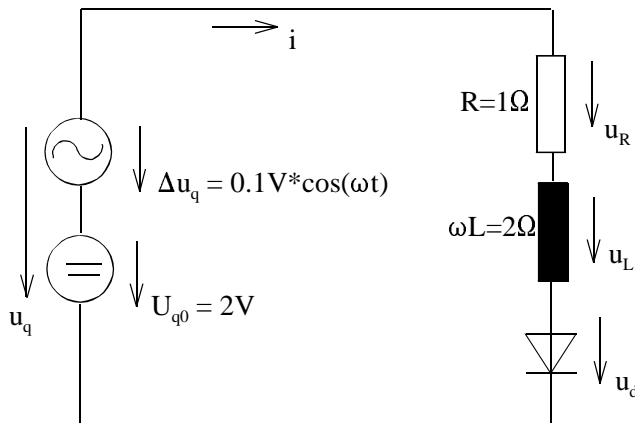
Aufgabe: 10.10.1c und d rechnen

10.11. Linearisierung

Prinzip:

Werden kleine Wechselgrößen einer wesentlich größeren Gleichgröße überlagert, so kann evtl. eine vorhandene Nichtlinearität linearisiert werden. Beispiel: Die nichtlineare Diodenkennlinie wird in der Nähe des Arbeitspunktes durch eine Gerade angenähert. Diese Annäherung gilt bekanntlich nur für kleine Abweichungen vom Arbeitspunkt.

Beispiel 1:



gegeben:

$$R = 1 \Omega$$

$$\omega L = 2 \Omega$$

$$i = 1 \text{ A} \left(\frac{u_d}{1 \text{ V}} \right)^2$$

$$U_{q0} = 2 \text{ V}$$

$$\Delta U_q = 0.1 \text{ V} * \cos(\omega t)$$

Bild MA1011A

Aufstellen der DGL:

$$u_R = R * i$$

$$u_L = L * \frac{di}{dt}$$

$$u_d = 1 \text{ V} * \sqrt{i / 1 \text{ A}}$$

$$u_R + u_L + u_d = U_{q0} + \Delta u_q(t)$$

$$R * i + L * \frac{di}{dt} + 1 \text{ V} \sqrt{\frac{i}{1 \text{ A}}} = U_{q0} + \hat{u}_q * \cos(\omega t) \quad (\text{A})$$

=> nichtlineare DGL

Bestimmung des Arbeitspunktes:

Der Arbeitspunkt wird dadurch bestimmt, daß in der DGL der Wechselanteil Null gesetzt wird. Dieses ergibt:

$$\hat{u}_q = 0$$

$$\frac{di}{dt} = 0$$

i_0 - Strom im Arbeitspunkt

Durch Einsetzen der oberen Annahme in die DGL (A) läßt sich i_0 berechnen:

$$R * i_0 + 1 V \sqrt{\frac{i_0}{1 A}} = U_{q0}$$

$$\sqrt{\frac{i_0}{1 A}} = \frac{U_{q0} - R * i_0}{1 V}$$

$$\frac{i_0}{1 A} = \frac{U_{q0}^2 - 2 U_{q0} * R * i_0 + R^2 * i_0^2}{(1 V)^2}$$

$$\frac{i_0}{1 A} = \frac{(2 V)^2 - 2 * 2 V * 1 \Omega * i_0 + (1 \Omega)^2 * i_0^2}{(1 V)^2}$$

$$\left(\frac{i_0}{1 A} \right) = 4 - 4 \left(\frac{i_0}{1 A} \right) + \left(\frac{i_0}{1 A} \right)^2$$

$$\left(\frac{i_0}{1 A} \right)^2 - 5 \left(\frac{i_0}{1 A} \right) + 4 = 0$$

$$i_0 = 1 A \left[\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2} \right)^2 - 4} \right] = 1 A \left[\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \right] = 1 A$$

Linearisierung:

Der Ausdruck

$$f(i) = \sqrt{\frac{i}{1 A}} \tag{B}$$

in der DGL (A) ist der Grund für die nichtlineare DGL. Ziel: Die Funktion $f(i)$ wird für den Arbeitspunkt linearisiert. Der Ausdruck (B) wird in einer Taylor-Reihe bis linearen Term an der Stelle $i = i_0$ entwickelt:

$$f(i) = f(i=i_0) + \frac{df(i)}{di} \Big|_{i=i_0=1 A} * (i - i_0) = \sqrt{\frac{i_0}{1 A}} + \frac{1}{\sqrt{1 A}} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{i}} \Big|_{i=i_0=1 A} * (i - i_0)$$

$$f(i) = \sqrt{\frac{i_0}{1 A}} + \frac{1}{\sqrt{1 A}} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{1 A}} * (i - i_0) = 1 + \frac{1}{2 A} (i - 1 A) = 1 + \frac{i}{2 A} - \frac{1 A}{2 A}$$

$$f(i) = \sqrt{\frac{i}{1 A}} = \frac{i}{2 A} + \frac{1}{2} \tag{C}$$

Linearisierte DGL:

Das Einsetzen von (C) in (A) ergibt eine linearisierte DGL:

$$R * i + L * \frac{di}{dt} + 1 V \left[\frac{i}{2 A} + \frac{1}{2} \right] = U_{q0} + \hat{u}_q * \cos(\omega t)$$

$$\left(R + \frac{1 V}{2 A} \right) i + L * \frac{di}{dt} = U_{q0} - \frac{1}{2} V + \hat{u}_q * \cos(\omega t) \quad (D)$$

$$\left(1 \Omega + \frac{1}{2} \Omega \right) i + \omega L * \frac{di}{d(\omega t)} = 2 V - \frac{1}{2} V + 0.1 V * \cos(\omega t)$$

$$1.5 \Omega * i + 2 \Omega * \frac{di}{d(\omega t)} = 1.5 V + 0.1 V * \cos(\omega t) \quad (E)$$

Lösung der linearisierten DGL:

Die DGLn (D) und (E) sind lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten, die mit bekannten Methoden (Kap. 10.7.1) gelöst werden können. Für den eingeschwungenen Zustand (homogene Lösung mit e^{-t/t_0} abgeklungen) ergibt sich:

$$i = 1 A + 40 mA * \cos(\omega t - 53.1^\circ)$$

$$1 A = \frac{1.5 V}{1.5 \Omega}$$

$$40 mA = \frac{0.1 V}{\sqrt{(1.5 \Omega)^2 + (2 \Omega)^2}}$$

$$53.1^\circ = \arctan\left(\frac{2}{1.5}\right)$$

Hinweis: Ein praktischer Elektrotechniker würde das Beispiel 1 anders lösen:

- A] Arbeitspunkt aus Schnittpunkt der Kennlinien der Spannungsquelle U_{q0} mit R und der Diodenkennlinie bestimmen.
- B] Ersetzen der Diodenkennlinie durch eine Gerade (Linearisierung der Diodenkennlinie).
- C] Für die Abweichung vom Arbeitspunkt ergibt sich dann eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

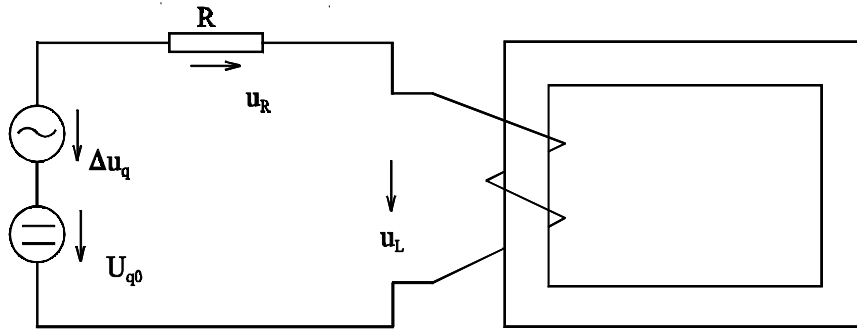
Beispiel 2:

Bild MA1011B

gegeben:

$$U_{q0}$$

$$\Delta u_q = \hat{u}_q \cdot \cos(\omega t)$$

$$\hat{u}_q \ll U_{q0}$$

N- Anzahl der Windungen

 A_{fe} - Eisenquerschnitt l_{Fe} - Feldlinienlänge $B = f(H)$ Magnetisierungskennlinie**Aufstellen der DGL:**

$$u_R = R \cdot i$$

$$u_L = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N \cdot A \cdot \frac{dB}{dt} = N \cdot A \cdot \frac{dB}{dH} \cdot \frac{dH}{dt}$$

$$H = \frac{N}{l_{Fe}} \cdot i \quad \frac{dH}{dt} = \frac{N}{l_{Fe}} \cdot \frac{di}{dt} \quad (A)$$

$$u_L = N \cdot A \cdot \frac{dB}{dH} \cdot \frac{N}{l_{Fe}} \cdot \frac{di}{dt}$$

$$u_L = \frac{N^2 \cdot A}{l_{Fe}} \cdot \frac{dB[H(i)]}{dH(i)} \cdot \frac{di}{dt}$$

$$u_R + u_L = U_{q0} + \Delta u_q$$

$$R \cdot i + \frac{N^2 \cdot A}{l_{Fe}} \cdot \frac{dB[H(i)]}{dH} \cdot \frac{di}{dt} = U_{q0} + \hat{u}_q \cdot \cos(\omega t) \quad (B)$$

Bestimmung des Arbeitspunktes:

Der Arbeitspunkt wird dadurch bestimmt, daß in der DGL (B) der Wechselanteil Null gesetzt wird:

$$\hat{u}_q = 0$$

$$\frac{di}{dt} = 0$$

i_0 - Strom im Arbeitspunkt

Durch Einsetzen der oberen Annahmen in die DGL (B) läßt sich i_0 berechnen:

$$R \cdot i_0 = U_{q0} \qquad i_0 = \frac{U_{q0}}{R}$$

Linearisierung:

Der Ausdruck

$$f(i) = \frac{dB[H(i)]}{dH} \qquad \text{Steigung der MKL}$$

ist für kleine Abweichungen vom Arbeitspunkt i_0 konstant. Aus (A) wird bestimmt:

$$H_0 = \frac{N}{l_{Fe}} \cdot i_0$$

Danach wird aus der Magnetisierungskennlinie $B = f(H)$ die Steigung im Punkt $H = H_0$ bestimmt:

$$f(i) = \left. \frac{dB[H]}{dH} \right|_{H=H_0} = \left. \frac{\Delta B}{\Delta H} \right|_{H=H_0} = \text{const} \qquad (C)$$

Linearisierte DGL:

Mit (C) kann die DGL (B) angegeben werden als:

$$R \cdot i + \frac{N^2 \cdot A}{l_{Fe}} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta H} \cdot \frac{di}{dt} = u_{q0} + \hat{u}_q \cdot \cos(\omega t) \qquad (C)$$

Die DGL (D) ist wiederum eine lineare mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung erheblich einfacher ist als die der nichtlinearen DGL (B).

Beispiel 3: (Nichtlineare Pendel-DGL nach Kap. 10.6, Beispiel 4)

gegeben: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \cdot \sin(\varphi) = 0$

$$\varphi(0) = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(0) = 0$$

Linearisierung:

Die obere DGL wird für Winkel untersucht:

$$\varphi \ll 1$$

Die Sinusfunktion wird durch die folgende Reihe ersetzt:

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{1}{3} \cdot \varphi^3 + \frac{1}{120} \cdot \varphi^5 + \dots$$

Für kleine Winkel ergibt sich

$$\sin(\varphi) \approx \varphi$$

Das gleiche Ergebnis erhält man durch eine Taylor-Reihen-Entwicklung an der Stelle $\varphi = \varphi_0 = 0$ bei Berücksichtigung bis zum linearen Term.

Linearisierte DGL:

Einsetzen der Näherung in die DGL ergibt eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \cdot \varphi = 0$$

Lösung der linearisierten DGL:

$$\lambda^2 + \frac{g}{r} = 0 \quad \lambda = \sqrt{-\frac{g}{r}} = j \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$y = \varphi_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}} t\right)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

Periodendauer

Theorie für die Linearisierung einer DGL 2. Ordnung

DGL: $F(y, y', y'') = 0$

Arbeitspunkt: $y' = 0 = y'' \Rightarrow F(y_0) = 0 \Rightarrow y_0$

Das Bilden des totalen Differentials der DGL an der Stelle $y = y_0$ und Übergang $d \rightarrow \Delta$ entspricht der Linearisierung: Mit den partiellen Ableitungen:

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} \quad F_{y''} = \frac{\partial F}{\partial y''}$$

ergibt das totale Differential der DGL

$$F_y(y_0) \Delta y + F_{y'}(y_0) \Delta y' + F_{y''}(y_0) \Delta y'' = 0$$

eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Variable Δy . Die Lösung Δy stellt die Abweichung vom Arbeitspunkt y_0 dar. Die y -Variablen ergeben sich danach zu:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \Delta y \\ y' &= \Delta y' \\ y'' &= \Delta y'' \end{aligned}$$

Zusammenfassung: Linearisierung durch Bildung des totalen Differentials

gegeben: DGL: $F(y, y', y'') = 0$

Arbeitspunkt bestimmen:

$$y' = 0 = y''$$

$$F(y, y' = 0, y'' = 0) = 0 \Rightarrow y_0$$

partielle Ableitungen bilden:

$$F_y = F_y(y = y_0, y' = 0, y'' = 0) = 0$$

$$F_{y'} = F_{y'}(y = y_0, y' = 0, y'' = 0) = 0$$

$$F_{y''} = F_{y''}(y = y_0, y' = 0, y'' = 0) = 0$$

Linearisierte DGL aufstellen:

$$F_{y''} \Delta y'' + F_{y'} \Delta y' + F_y \Delta y = 0$$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten lösen:

$$\Rightarrow \Delta y(x)$$

Gesamtlösung:

$$y = y_0 + \Delta y(x)$$

$$y' = \Delta y'$$

$$y'' = \Delta y''$$

Beispiel 4: (Pendel-DGL aus Kap. 10.5 nach der Methode Linearisierung mit Hilfe des totale Differentials)

gegeben: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \sin(\varphi) = 0$

DGL in y und x umschreiben:

$$y'' + \frac{g}{r} \sin(y) = 0$$

$$F(y, y', y'') = y'' + \frac{g}{r} \sin(y) = 0$$

Arbeitspunkt-Bestimmung:

$$y'' = 0$$

$$F(y_0) = \frac{g}{r} \sin(y_0) = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

partielle Ableitungen bilden:

$$F(y_0) = \frac{g}{r} \cos(y) \Big|_{y=y_0=0} = \frac{g}{r} \quad F'_y = 0 \quad F''_y = 1$$

Linearisierte DGL:

$$F''_y(y_0) \Delta y'' + F'_y(y_0) \Delta y' + F_y(y_0) \Delta y = 0$$

$$\Delta y'' + \frac{g}{r} \Delta y = 0$$

Lösung siehe Beispiel 3

Beispiel 5:

gegeben: DGL: $y^2 + y' = 1$
 Anfangsbedingung: $y(x=0) = 0.99$

Arbeitspunkt-Bestimmung: $y' = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$

Partielle Ableitung bilden: $F_y = 2y$ $F_y(y=y_0=1) = 2$ $F_y' = 1$

Linearisierte DGL: $F_y' * \Delta y' + F_y * \Delta y = 0$

$$\Delta y' + 2\Delta y = 0$$

Lösung der linearisierten DGL: $\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \Delta y = c * e^{-2x}$
 $y = y_0 + \Delta y \Rightarrow y = 1 + c * e^{-2x}$

Anfangsbedingung auswerten: $y_0 = 0.99 = 1 + c * e^0 \Rightarrow c = -0.01$
 $y = 1 - 0.01 * e^{-2x}$

Analytische Lösung der oberen DGL

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

$$\frac{dy}{1 - y^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int dx$$

$$\operatorname{artanh}(y) = x + c$$

$$y = \tanh(x+c) = \frac{1 - e^{-2x-2c}}{1 + e^{-2x-2c}} \quad e^{-2c} = c_1$$

$$y = \frac{1 - c_1 * e^{-2x}}{1 + c_1 * e^{-2x}}$$

$$y(x=0) = 0.99 = \frac{1 - c_1}{1 + c_1}$$

$$0.99 + 0.99c_1 = 1 - c_1$$

$$1.99c_1 = 1 - 0.99 \quad c_1 = \frac{0.01}{1.99}$$

$$y = \frac{1 - \frac{0.01}{1.99} * e^{-2x}}{1 + \frac{0.01}{1.99} * e^{-2x}}$$

Aufgabe 10.11.1 a)

gegeben: $F(y, y', y'') = y'' + 3y' + y^2 + 6y - 27 = 0$
 $y(x=0) = 2.5$ $y'(x=0) = 0$

Arbeitspunkt-Bestimmung:

$$y'' = 0 = y'$$

$$y_0^2 + 6y_0 - 27 = 0$$

$$y_0 = -3 \pm \sqrt{9 + 27} = -3 \pm 6 = 3$$

Partielle Ableitungen bilden:

$$F_{y''} = 1$$

$$F_{y'} = 3$$

$$F_y = 2y + 6 \quad F_y(y_0=3) = 2*3 + 6 = 12$$

Linearisierte DGL:

$$F_{y''} * \Delta y'' + F_{y'} * \Delta y' + F_y * \Delta y = 0$$

$$\Delta y'' + 3\Delta y' + 12\Delta y = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1.5 \pm \sqrt{2.25 - 12} = 1.5 \pm j3.122$$

$$\Delta y = e^{-1.5x} [C_1 * \cos(3.122x) + C_2 * \sin(3.122x)]$$

$$\Delta y = -0.5 * e^{-1.5x} * \cos(3.122x)$$

$$y = y_0 + \Delta y$$

$$y = 3 - 0.5 * e^{-1.5x} * \cos(3.122x)$$

10.12. Stabile und instabile DGL

Satz: Eine lineare DGL ist stabil, wenn die homogene Lösung $y_h(x)$ für $x \rightarrow \infty$ Null wird, ansonsten ist die DGL instabil.

Beispiel: lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = -\frac{a_1}{2} \pm j \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} = a \mp jb$$

$$y_{hom} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = e^{ax} [c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx)]$$

Damit die obere homogene Lösung Null wird für $x \rightarrow \infty$, muß das Argument der e-Funktion negativ sein:

$$a < 0, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$

allgemein: $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$

Satz: Damit die Lösung einer linearen DGL mit konstanten Koeffizienten stabil ist, müssen die Eigenwerte (Nullstellen des charakteristischen Polynoms) alle in der linken Hälfte der komplexen Ebene liegen.

Die Stabilität von nichtlinearen DGLn kann durch Linearisierung (Kap. 10.11) festgestellt werden.

Bestimmung der Stabilität der homogenen DGL

$$a_n * y^{(n)} + a_{n-1} * y^{(n-1)} + \dots + a_2 * y'' + a_1 * y' + a_0 * y = 0 \quad a_0 > 0$$

A] Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynom

$$a_n * \lambda^n + a_{n-1} * \lambda^{(n-1)} + \dots + a_2 * \lambda^2 + a_1 * \lambda + a_0 * y = 0$$

stabil wenn alle $\operatorname{Re}(\lambda_0) < 0$

B] Hurwitz Kriterium

Soll nur die Stabilität untersucht werden, besteht keine Notwendigkeit einer aufwendigen Nullstellen-Bestimmung

Notwendige Bedingung: alle $a_i > 0$ $i = 0 \dots n$

Ist die notwendige Bedingung nicht erfüllt, ist die DGL instabil.

Ist die notwendige Bedingung erfüllt, muß die hinreichende Bedingung überprüft werden. Dazu wird die Hurwitz-Matrix aufgestellt.

Die Hurwitzmatrix für 7. Ordnung ergibt:

$$\bar{H} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ \hline a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 0 & 0 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & a_6 & a_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 \\ \hline \end{array}$$

Das Schema ist aus der Hurwitzmatrix für $n = 7$ zu erkennen. Für z.B. $n = 3$ müssen alle a_i mit $i > 0$ Null gesetzt werden ($a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0$ und $a_7 = 0$).

Die hinreichend Bedingung sagt aus, daß n Unterdeterminanten der Hurwitz-Matrix (obere linke Ecke) größer Null sein müssen:

$$\det(H_1) = \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

⋮

Beispiel 1: (1. Ordnung, linear, konstante Koeffizienten, allgemein)

$$a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad a_0 > 0$$

notwendige Bedingung: alle $a_i > 0$

$$\bar{H} = \boxed{a_1} \qquad \det(H_1) = a_1 > 0$$

Die Determinante liefert für den Fall 1. Ordnung keine weitere Bedingung. Die lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist stabil, wenn a_0 und a_1 beide größer Null sind.

Beispiel 2: (2. Ordnung, linear, konstante Koeffizienten, allgemein)

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

notwendige Bedingung: alle $a_i > 0$

$$\tilde{H} = \begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & a_0 \\ \hline 0 & a_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\det(\tilde{H}) = a_1 > 0$$

$$\det(\tilde{H}_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 * a_2 > 0$$

Gesamtergebnis: $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$ (war auch schon notwendige Bedingung)

Beispiel 3: (3. Ordnung, linear, konstante Koeffizienten, allgemein)

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

notwendige Bedingung: alle $a_i > 0$

$$\tilde{H} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & a_0 & 0 \\ \hline a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 0 & 0 & a_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\det(\tilde{H}_1) = a_1 > 0$$

$$\det(\tilde{H}_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 * a_2 - a_0 * a_3 > 0$$

$$\det(\tilde{H}_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 * \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 * \det(\tilde{H}_2)$$

Gesamtergebnis: $a_0 > 0$
 $a_1 > 0$
 $a_1 * a_2 - a_0 * a_3 > 0$
 $a_3 > 0$

Beispiel 4: (4. Ordnung mit Zahlenwerten)

$$y'''' + 13y''' + 60y'' + 116y' + 80y = 0$$

$$\lambda^4 + 13\lambda^3 + 60\lambda^2 + 116\lambda + 80 = 0$$

$$a_4 = 1 \quad a_3 = 13 \quad a_2 = 60 \quad a_1 = 116 \quad a_0 = 80$$

$$\bar{H} =$$

116	80		
13	60	116	80
	1	13	60
			1

Die notwendige Bedingung alle $a_i > 0$ ist erfüllt.

$$\begin{aligned} \det(\bar{H}_1) &= 116 > 0 & \Rightarrow & \text{OK} \\ \det(\bar{H}_2) &= 116 \cdot 60 - 13 \cdot 80 = 5920 > 0 & \Rightarrow & \text{OK} \\ \det(\bar{H}_3) &= -1 \cdot 116^2 + 13 \cdot 5920 = 63504 > 0 & \Rightarrow & \text{OK} \\ \det(\bar{H}_4) &= 1 \cdot \det(\bar{H}_3) & \Rightarrow & \text{OK} \end{aligned}$$

Alle Bedingungen sind erfüllt, damit ist die DGL stabil.

11. Laplace Transformation

11.1. Einleitung

Was ist eine Transformation? In Kap. 2 (MA I) sind Funktionen vorgestellt worden. Funktionen sind die Abbildungen von Zahlen auf andere Zahlen, also eine Zuordnungsbedingung zwischen Zahlen. Es wird eine Zahl in eine andere Zahl transformiert. Hier den Begriff Transformation zu verwenden, wäre sicher ein wenig hochgestapelt. Ein Schritt weiter: Eine Funktion auf eine andere abbilden, dieses nennt man Transformation. Beispiele:

$$y_2(x) = [y_1(x)]^2 \quad - \text{Quadrieren der Funktion } y_1(x)$$

$$y_3(x) = \int y_1(x) dx \quad - \text{Integration der Funktion } y_1(x)$$

$$y_4(x) = dy_1(x)/dx \quad - \text{Differentiation der Funktion } y_1(x)$$

$$y_5(x) = \sin[y_1(x)] \quad - \text{Sinus-Funktion bilden von der Funktion } y_1(x)$$

Die oben angegebenen Abbildungen von Funktionen (Transformationen) sind schon bekannt. Was ist nun aber die **Laplace-Transformation**? Antwort: auch eine Transformation einer Funktion. Die Funktionsvorschrift dieser Transformation wird später erarbeitet.

Wozu ist die Laplace-Transformation nützlich? Später wird gezeigt: **Die Laplace Transformation ist ein sehr gutes Hilfsmittel zum Lösen von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.** Anwendung findet die Laplace-Transformation u.a. bei der Berechnung von Schaltvorgängen in linearen Netzwerken und bei der Untersuchung von linearen Regelkreisen.

Die Laplace Transformation wurde im 19. Jahrhundert vom französischen Mathematiker Laplace entwickelt.

Wie kann man auf die Idee kommen, eine Transformation einzuführen. Dazu sollen die Ergebnisse des Beispiels 2 aus Kap. 9.3 noch einmal betrachtet werden. Ein Rechteck-Impuls wird an die Reihenschaltung Widerstand R und Kondensator C gelegt, siehe Bilder MA93A und MA111A.

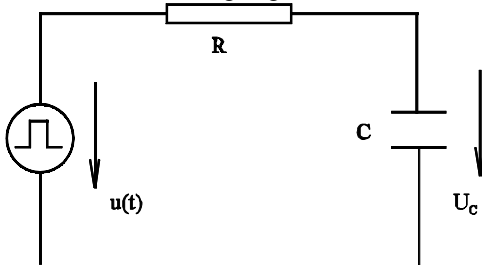


Bild MA93A

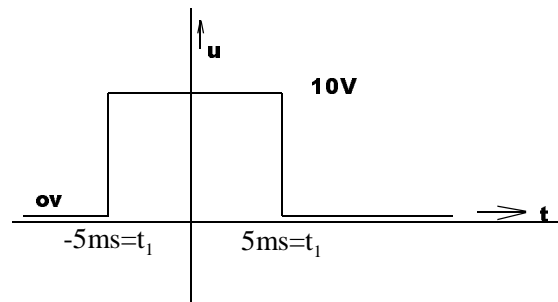


Bild MA111A

Die Vorgehensweise aus Kap. 9.3 in einer Zusammenfassung: Die Spannung $u(t)$ wird mit Hilfe des Fourier-Integrals in die Frequenzkomponenten zerlegt:

$$U(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} u(t) * e^{-j\omega t} dt = \frac{10 V}{j\omega} [e^{j\omega t_1/2} - e^{-j\omega t_1/2}]$$

Dieses ergibt bei einem Einmal-Signal nach Kap. 9.2 ein kontinuierliches (für jede Frequenz eine infinitesimal kleine Amplitude) Frequenzspektrum. Die komplexe Spannung ergibt sich somit aus der Addition unendlich vieler komplexer Frequenz-Anteile. Für jede Frequenzkomponente wird zur Berechnung der Spannung $u_c(t)$ ein komplexer Spannungsteiler angesetzt, dieses ergibt die Spannung am Kondensator im Frequenzbereich:

$$U_c(\omega) = \frac{10 V}{j\omega} * \frac{e^{j\omega t_1/2} - e^{-j\omega t_1/2}}{1 + j\omega/\omega_1} \quad \text{mit} \quad \omega_1 = (R * C)^{-1} = 100 \text{ s}^{-1}$$

Zur Berechnung der Spannung $u_c(t)$ muß die Spannung vom Frequenzbereich in den Zeitbereich zurücktransformiert werden:

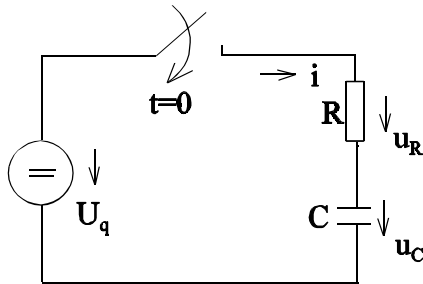
$$u_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} U_C(\omega) * e^{j\omega t} d\omega$$

$$u_c(t) = \frac{10 \text{ V}}{j2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} * \frac{e^{j\omega t/2} - e^{-j\omega t/2}}{(1 + j\omega/\omega_1)\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

Das obere Integral ist nur unter großen Aufwand mit Hilfe der Funktionstheorie lösbar. Dieses ist mit den bislang erläuterten Methoden nicht möglich. Es sollte aber eine einfache Methode gefunden werden, die eine schnelle Lösung erlaubt. Der Praktiker transformiert mit Hilfe von Tafeln und einfacher Umformungen den Ausdruck $U_C(\omega)$ vom Frequenzbereich in den Zeitbereich $u_c(t)$.

Die Laplace Transformation ist eine Transformation vom Zeit- in den Frequenzbereich.

Bevor die Anwendung der Laplace Transformation deutlich wird, muß erst sehr viel Theorie aufgezeigt werden. Um zu sehen, welchen Sinn die Laplace Transformation hat, soll erst einmal ein Beispiel berechnet werden. Dieses ist im Moment noch nicht verständlich. Nur das Prinzip ist zu sehen. Die DGL wird in den Frequenzbereich transformiert. Die algebraische Gleichung nach $U_C(p)$ aufgelöst und in den Zeitbereich zurücktransformiert.



$$u_R = R * i = R * C * \frac{du_c}{dt}$$

DGL: $U_q = u_R + u_C$ $U_q = u_C + R * C * \frac{du_c}{dt}$

DGL transformiert: $\frac{U_q}{p} = U_C(p) + RC[pU_C(p) - u_{C0}]$

Anfangsdingung: $u_{C0} = u_C(t=0)$

Umformen: $\frac{U_q}{p} + u_{C0} = U_C(p)[1 + R * C * p]$

Auflösen nach $U_C(p)$: $U_C(p) = \frac{U_q + pU_{C0}}{p(1 + R * C * p)}$

Partialbruchzerlegung: $U_C(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{RC}}$

$U_C(p)$ in den Zeitbereich transformieren: $u_c(t) = A + B * e^{-t/RC}$

Die Berechnung ist nicht sehr aufwendig. Die Anfangsbedingungen werden mit berücksichtigt.

11.2. Transformations-Vorschrift

Die Laplace Transformation kann mit Hilfe des Fourier-Integrals hergeleitet werden. Dazu noch einmal die Formeln des Fourier-Integrals aus Kap. 9.2:

$$Y(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \quad (9.29)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} Y(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (9.30)$$

Bedingung: $\int_{t=-\infty}^{+\infty} |y(t)| dt = a < \infty$

Einführung einer komplexen Kreis-Frequenz “p” Laplace-Variable

$$p = \sigma + j\omega$$

p - Laplace - Variable

Die komplexe Frequenz p wird auch Laplace-Variable genannt. In manchen Literaturstellen wird die Laplace-Variable auch mit “s” bezeichnet, vorzugsweise bei Mathematikern. Vergleich: Für die imaginäre Einheit verwenden Ingenieure “j” und “i” wird von Mathematikern benutzt. Was bedeutet nun eine komplexe Kreis-Frequenz? Die reelle Kreis-Frequenz “ω” ist z.B. von der Kosinus-Funktion her bekannt:

$$y_1(t) = \cos(\omega t) = \operatorname{Re}\{e^{j\omega t}\}$$

Die obere Funktion stellt eine Schwingung mit konstanter Amplitude dar. Das Ersetzen von $j\omega$ durch $p = \sigma + j\omega$ ergibt:

$$y_2(t) = \operatorname{Re}\{e^{(\sigma+j\omega)t}\} = \operatorname{Re}\{e^{\sigma t} * e^{j\omega t}\}$$

$$y_2(t) = e^{\sigma t} * \operatorname{Re}\{e^{j\omega t}\}$$

$$y_2(t) = e^{\sigma t} * \cos(\omega t)$$

Die komplexe Frequenz führt zu einer Schwingung multipliziert mit der Zeitfunktion $e^{\sigma t}$.

$$\sigma > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{aufklingende Schwingung}$$

$$\sigma < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{gedämpfte Schwingung}$$

$$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Dauerschwingung}$$

In der gleichen Weise - wie bei der Kosinus-Schwingung - soll nun beim Fourier-Integral (9.29) und (9.30) $j\omega$ durch p ersetzt werden, man erhält:

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} y(t)e^{-pt} dt \quad (11.1)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{p=\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} Y(p)e^{pt} dp \quad (11.2)$$

Mit den Bedingungen:

$$\operatorname{Re}(p) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_0 > 0 \quad (11.3)$$

$$y(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0 \quad (11.4)$$

Die erste Bedingung (11.3) ist notwendig damit die Transformation (11.1) konvergent wird. Siehe auch: Einführung komplexer Frequenz, $\sigma > 0$ führt zu aufklingenden Schwingungen.

Die Laplace-Transformation wird überwiegend für Berechnungen von zeitlichen Vorgängen benutzt, da interessiert nur der Zeitbereich $t > 0$. Darum ist die Bedingung (11.4) keine Einschränkung. Die untere t-Grenze in (11.1) kann darum bei $t = 0$ begonnen werden (beim Fourier-Integral bei $-\infty$).

Die Gleichung (11.1) wird als Laplace-Transformation bezeichnet, die Gleichung (11.2) als Rücktransformation.

y(t)	-	Zeitbereich	Variable t
Y(p)	-	Frequenzbereich ,Bildbereich	Variable p

Die Formeln (11.1) und (11.2) sehen äußerst kompliziert aus. Behauptung: Zum Lösen einer DGL mit Hilfe der Laplace-Transformation ist keine Integral-Transformation erforderlich. Aber die Transformationen (11.1) und (11.2) müssen dabei ausgeführt werden. Vorwegnahme: Die zu transformierenden Funktionen y(t) und Y(p) werden in der Regel umgeformt (u.a. Partialbruchzerlegung) und mit Hilfe von Tabellen transformiert. Dazu benötigt man außer der Integral-Schreibweise (11.1) und (11.2) noch bestimmte Bezeichnungen, die deutlich machen, daß eine Transformation ausführt wird.

Laplace-Transformation

Zeit-Bereich \Rightarrow Frequenz-Bereich oder Bildbereich

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} y(t)e^{-pt} dt \quad (11.1)$$

$$Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$Y(p) \quad \bullet \text{-----} \circ \quad y(t)$$

obere drei Schreibweisen bedeuten mathematisch vereinbarungsgemäß das Gleiche. Die zwei unteren Schreibweisen sind üblich.

Rücktransformation

Frequenz-Bereich \Rightarrow Zeit-Bereich

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{p=\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} Y(p)e^{pt} dp \quad (11.2)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\}$$

$$y(t) \quad \circ \text{-----} \bullet \quad Y(p)$$

Anmerkung: Zeitgrößen klein y(t)
Frequenzgrößen groß Y(p)

Vorgehensweise: Im nächsten Abschnitt 11.3 werden Funktionen vorgestellt, die im übernächsten Abschnitt 11.4 mit Hilfe der Gleichung (11.1) transformiert werden. Das Ergebnis wird in eine Tabelle eingetragen, die der Praktiker zum Arbeiten mit der Laplace-Transformation benutzt.

11.3. Definitionen von Funktionen und Operationen

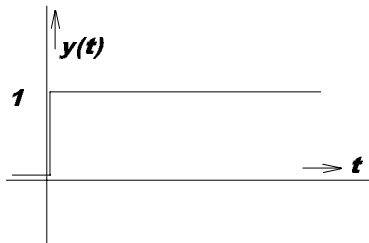
Bevor in Kap. 11.4 die exemplarische Berechnung von Laplace-Integralen erfolgt, müssen die zu transformierenden Funktionen und Operationen in diesem Abschnitt 11.3 definiert werden. Die hier definierten Funktionen stellen die Anregungen der linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten dar. Beispiel: Eine einzuschaltende Gleichspannungsquelle stellt eine Sprung-Funktion dar, die in der DGL den inhomogenen Teil $f(x)$ bzw. $f(t)$ repräsentiert.

Abhängige und unabhängige Variable:

Im Kapitel 10 war bei den DGLn die unabhängige Variable "x". In diesem Kapitel soll nun die Zeit "t" die unabhängige Variable darstellen. Der Grund: In der Praxis wird die Laplace-Transformation in der Regel zum Berechnen von Zeitvorgängen benutzt. Beispiel aus der Elektrotechnik: Schalten von Spannungsquellen. Die abhängige Variable ist in der Praxis eine physikalische Größe (z.B. Spannung u), in diesem Kapitel wird "y" als abhängige Variable gewählt.

11.3.1. Sprung-Funktion $s(t)$

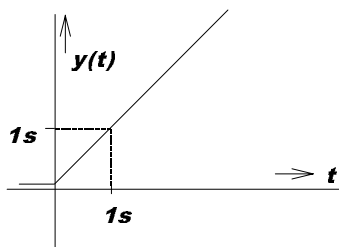
Die Sprung-Funktion, siehe Bild MA1131A, wird benötigt, weil alle Zeitvorgänge laut Definition erst bei $t = 0$ beginnen.



$$\begin{aligned} s(t) &= 1 & t > 0 \\ s(t) &= 0 & t < 0 \end{aligned}$$

Bild MA1131A

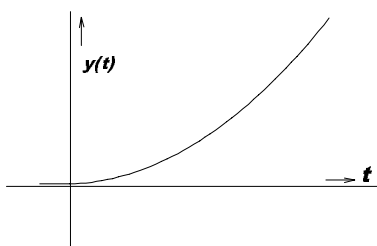
11.3.2. Rampen-Funktion $r(t)$



$$\begin{aligned} r(t) &= t & t > 0 \\ r(t) &= 0 & t \leq 0 \\ r(t) &= s(t) * t & \text{allgemein} \end{aligned}$$

Bild MA1132B

11.3.3. Potenzfunktion

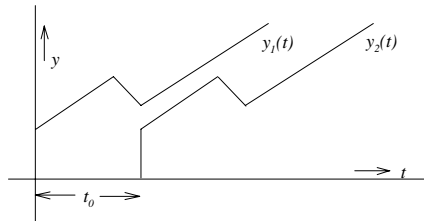


$$\begin{aligned} y(t) &= t^n & t > 0 \\ y(t) &= 0 & t \leq 0 \\ y(t) &= t^n * s(t) & \text{allgemein} \end{aligned}$$

Bild MA1133A

11.3.4. Verschiebung in positiver t-Richtung

Mit der Sprung-Funktion lassen sich Schaltvorgänge bei $t = 0$ beschreiben. Ein Schalten für $t < 0$ ist laut Definition nicht möglich. Wie läßt sich nun ein Schalten für $t > 0$ beschreiben? Antwort: durch eine verschobene Zeitfunktion, siehe Bild MA1134A. Dieses wird u.a. benötigt für Anwendungen mit mehrmaligen Schaltheandlungen. Physikalisch entspricht die Verschiebung aber auch einer Lauf- oder Wartezeit um die ein Signal verzögert wird (Förderband, Signallaufzeit mit Lichtgeschwindigkeit oder anderer Signalgeschwindigkeit). Weil laut Definition für $t < 0$ kein Signal vorhanden sein darf, kann das Signal nur in positive t-Richtung verschoben werden. Dieses bedingt positive t_0 . Auch die physikalische Erklärung läßt nur positive t_0 zu, weil es keine negativen Laufzeiten gibt.



$$y_2(t) = y_1(t - t_0) \quad t_0 > 0$$

Bild MA1134A

11.3.5. Übungen zu 11.3.1 bis 11.3.4

Beispiel 1:

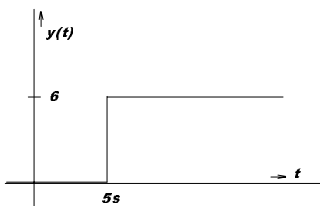


Bild MA1135A

Die obere Funktion stellt die um 5s verschobene und 6 multiplizierte Sprungfunktion dar:

$$y(t) = 6s(t-5s)$$

Beispiel 2:

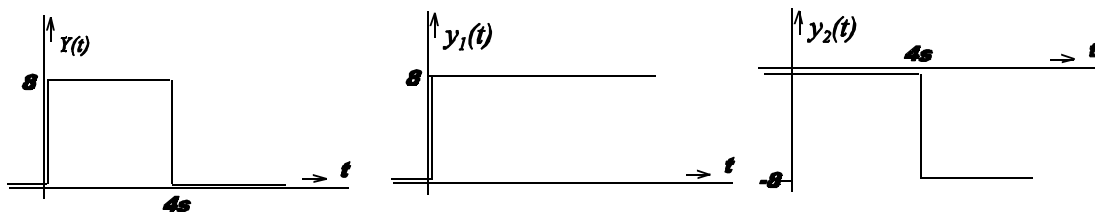


Bild MA1135B

Die Funktion $y(t)$ läßt sich als Summe (Differenz) zweier Sprungfunktionen ausdrücken:

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) = 8*s(t) - 8s(t-4s)$$

$$y(t) = 8[s(t) - s(t-4s)]$$

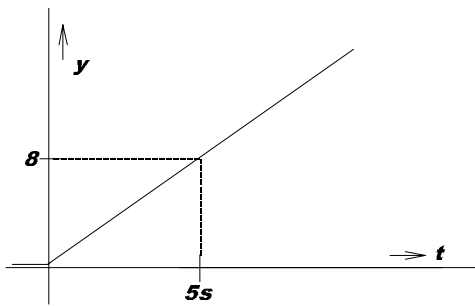
Beispiel 3:

Bild MA1135C

Die obere Funktion entspricht der Rampe $r(t)$ mit geänderter Steigung. Die Rampe weist laut Definition (siehe Kap. 11.3.2) bei $5s$ den Wert $r(5s) = 5s$ auf. Um bei $y(t=5s)$ den Wert 8 zu erhalten muß die Rampe mit dem Wert $(8/5s)$ multipliziert werden:

$$y(t) = \frac{8}{5s}r(t)$$

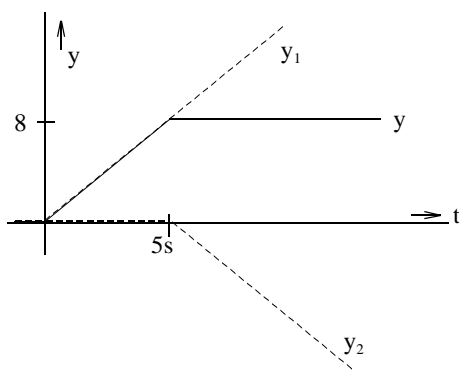
Beispiel 4:

Bild MA1135D

Die obere Funktion läßt sich aus der Addition zweier Funktionen (Rampen) zusammensetzen:

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

$y_1(t)$ ist die Rampe aus Beispiel 3. $y_2(t)$ erhält man aus $y_1(t)$ durch verschieben um $5s$ und Multiplikation mit “-1”.

$$y_1(t) = \frac{8}{5s}r(t)$$

$$y_2(t) = -y_1(t-5s)$$

$$y(t) = \frac{8}{5s}[r(t) - r(t-5s)]$$

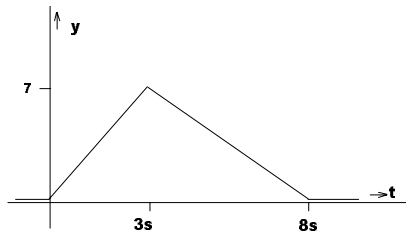
Beispiel 5:

Bild MA1135E

Die oben dargestellte Funktion besteht aus Geraden mit unterschiedlichen Steigungen:

$t < 0$	Steigung: 0
$0 < t < 3 \text{ s}$	Steigung: $+7/3\text{s}$
$3\text{s} < t < 8\text{s}$	Steigung: $-7/5\text{s}$

Um die Funktion $y(t)$ anzugeben, müssen mehrere Rampen addiert werden. Bei $t = 0$ setzt die Rampe mit der Steigung $7/5\text{s}$ ein. Bei $t = 3\text{s}$ muß die Steigung $7/3\text{s}$ subtrahiert werden, außerdem setzt die negative Steigung $-7/5\text{s}$ ein. Bei $t = 8\text{s}$ muß die negative Steigung $-7/5\text{s}$ wieder aufgehoben werden.

$$y(t) = \frac{7}{3\text{s}}r(t) - \left[\frac{7}{3\text{s}} + \frac{7}{5\text{s}} \right]r(t-3\text{s}) + \frac{7}{5\text{s}}r(t-8\text{s})$$

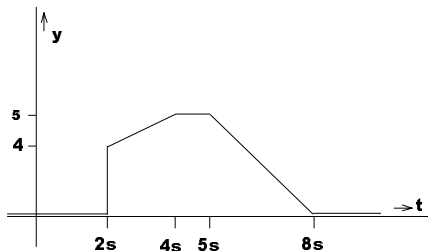
Beispiel 6:

Bild MA1135F

Zur Beschreibung der oberen Funktion müssen mehrere Sprung-Funktionen und Rampen addiert werden:

$t = 2\text{s}$	Sprungfunktion der Höhe 4 und Rampe der Steigung $(1/2\text{s})$
$t = 4\text{s}$	Rampe der Steigung $(1/2\text{s})$ aufheben
$t = 5\text{s}$	Rampe der Steigung $(-5/3\text{s})$ addieren
$t = 8\text{s}$	Rampe der Steigung $(-5/3\text{s})$ aufheben

$$y(t) = 4s(t-2s) + \frac{1}{2s}r(t-2s) - \frac{1}{2s}r(t-4s) - \frac{5}{3s}r(t-5s) + \frac{5}{3s}r(t-8s)$$

Studenten: Aufgabe 11.3.1 rechnen

11.3.6. Faltungsintegral

Das Faltungsintegral verknüpft zwei gegebene Funktionen

$y_1(t)$ und $y_2(t)$

mit Hilfe der Definition

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) * y_2(t - \tau) d\tau \quad (11.5)$$

zu einer dritten Funktion. Die Anwendung dieser Operation erfolgt im Abschnitt 11.6.7. Die Aussage des Faltungsintegrals soll nun anschaulich verdeutlicht werden, siehe Bild MA1136A. Die von der Variablen t abhängigen Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ werden überführt in von der Variablen τ abhängigen Funktionen. Bei der Funktion $y_1(t)$ wird "t" nur durch "τ" ersetzt:

$y_1(t) \rightarrow y_1(\tau)$

In der Funktion $y_2(t)$ wird "t" ersetzt durch "t-τ":

$y_2(t) \rightarrow y_2(t-\tau)$

Die Funktion y_2 wird somit verschoben und gespiegelt. Die Funktion y_2 ist somit im Vergleich zur Funktion y_1 um den Parameter "t" gefaltet. Sowohl $y_1(\tau)$ als auch $y_2(t-\tau)$ sind Funktionen die von der Variablen τ abhängig sind. Die Zeit t ist in der Funktion y_2 nur noch als konstanter Parameter anzusehen, siehe Bild MA1136A, Teilbild b.

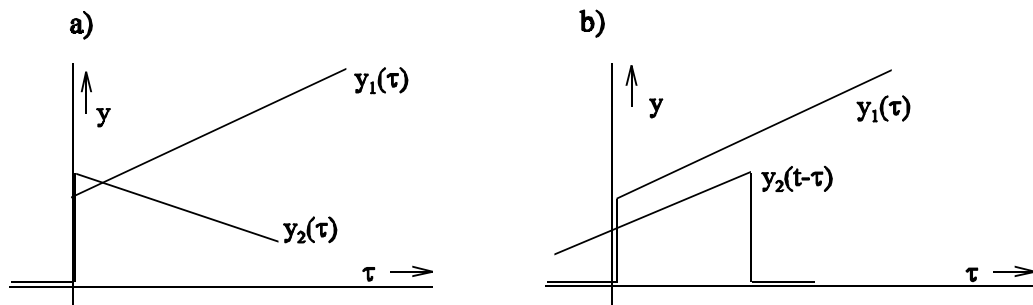


Bild MA1136A

Das Integral (11.5) kann für einen bestimmten (im Moment konstanten) Zeitpunkt t gedeutet werden. Die Integration erfolgt über τ , t ist nur Parameter für das Integral. Um das Faltungsintegral (11.5) für einen t -Wert zu bestimmen, müssen die zwei in Bild MA1136A b) dargestellten Funktionen multipliziert und integriert werden. Die Integration erfolgt von $\tau = 0$ bis $\tau = t$. Das Ergebnis wird durch die obere Integrationsgrenze wieder eine Funktion von t . Ohne Beweis: **Die Funktionen y_1 und y_2 dürfen auch getauscht werden, ohne daß sich das Ergebnis ändert.**

Beispiel 1:**gegeben:** $y_1(t) = t$ $y_2(t) = \sin(\omega_1 t)$ **gesucht:** Faltungsintegral nach (11.5)**Lösung:**tauschen: $y_1(t) = \sin(\omega_1 t)$ $y_2(t) = t$ τ - einsetzen: $y_1(\tau) = \sin(\omega_1 \tau)$ $y_2(t-\tau) = (t-\tau)$ $t > \tau$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) * y_2(t-\tau) = \int_{\tau=0}^t \sin(\omega_1 \tau) * (t-\tau) d\tau = t * \int_{\tau=0}^t \sin(\omega_1 \tau) * d\tau - \int_{\tau=0}^t \tau * \sin(\omega_1 \tau) * d\tau$$

Tabelle: $\int x * \sin(cx) dx = \frac{\sin(cx)}{c^2} - \frac{x * \cos(cx)}{c}$

$$y(t) = \left[-t * \frac{1}{\omega_1} \cos(\omega_1 \tau) - \left(\frac{\sin(\omega_1 \tau)}{\omega_1^2} - \frac{\tau * \cos(\omega_1 \tau)}{\omega_1} \right) \right]_{\tau=0}^t$$

$$y(t) = -t * \frac{1}{\omega_1} \cos(\omega_1 t) - \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2} + \frac{t * \cos(\omega_1 t)}{\omega_1} + t * \frac{1}{\omega_1} * \cos(0) + \frac{0}{\omega_1^2} \sin(0) - \frac{0 * \cos(0)}{\omega_1}$$

$$y(t) = -\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2} + \frac{t}{\omega_1}$$

Beispiel 2:**gegeben:** $y_1 = t$ $y_2 = t^2$ **gesucht:** Faltungsintegral nach (11.5)**Lösung:** τ - einsetzen: $y_1(\tau) = \tau$ $y_2(t-\tau) = (t-\tau)^2$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) * y_2(t-\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t \tau * (t-\tau)^2 d\tau$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t \tau * (t^2 - 2t\tau + \tau^2) d\tau = \int_{\tau=0}^t (t^2 \tau - 2t\tau^2 + \tau^3) d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 \tau^2 - \frac{2}{3} t \tau^3 + \frac{1}{4} \tau^4 \Big|_{\tau=0}^t$$

$$y(t) = t^4 \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{12} t^4$$

11.4. Laplace Transformation bekannter Funktionen

Standardproblem der Laplace-Transformation

$$y_1(t) \quad \circ \text{-----} \bullet \quad Y_1(p) \quad \text{-----} > \quad Y_2(p) \quad \bullet \text{-----} \circ \quad y_2(t)$$

Die obere Kette zeigt die Vorgehensweise bei der Lösung mittels Laplace-Transformation. Eine gegebene Anregungsfunktion $y_1(t)$ (Eingang eines Filters oder inhomogener Teil der linearen DGL mit konstanten Koeffizienten) wird vom Zeitbereich in den Frequenzbereich transformiert. Durch Berechnung im Frequenzbereich (Vorgehensweise später) ergibt sich die Laplace-Transformierte $Y_2(p)$. Durch Zurücktransformieren in den Zeitbereich läßt sich die gesuchte Zeitfunktion $y_2(t)$ berechnen. Der Praktiker führt die Transformation in beiden Richtungen mit Hilfe von Tabellen und weiteren Umformungen durch. In diesem Abschnitt soll die Tabelle der Standard-Funktionen mit Hilfe der Transformationsformel (11.1) erarbeitet werden.

A. Sprung-Funktion

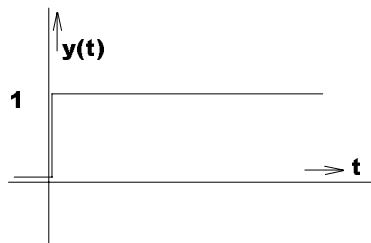


Bild MA1131A

Praktische Form der Berechnung

$$y(t) = s(t) \quad \circ \text{-----} \bullet \quad Y(p) = S(p)$$

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} y(t) * e^{-pt} dt \quad (11.1)$$

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} s(t) * e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{-p} e^{-pt} \Big|_{t=0}^{\infty}$$

$$Y(p) = -\frac{1}{p} [e^{-\infty p} - e^{-0p}]$$

$$\operatorname{Re}\{p\} = \sigma_0 > 0 \quad (11.3) \quad \Rightarrow \quad e^{-pt} = 0$$

$$Y(p) = -\frac{1}{p} [0 - 1] = \frac{1}{p}$$

Ergebnis:

$$y(t) = s(t) \quad \circ \text{-----} \bullet \quad Y(p) = \frac{1}{p}$$

$$\mathcal{L}\{s(t)\} = \frac{1}{p}$$

Mathematisch korrekte Form der Berechnung

Die obere Berechnung war übersichtlich, aber nicht vollkommen mathematisch korrekt. Das Integral

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} dt$$

ist ein uneigentliches Integral (siehe Kap. 7.9.2, MA II), welches mit Hilfe eines Grenzübergangs gelöst werden muß:

$$Y(p) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \int_{t=0}^a * e^{-pt} dt \right\} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \left[-\frac{1}{p} * e^{-pt} \right]_{t=0}^a \right\} = -\frac{1}{p} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} (e^{-p*a}) - \lim_{a \rightarrow \infty} \{e^0\} \right]$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \{e^{-p*a}\} = 0 \quad \text{für } \operatorname{Re}(a) > 0$$

$$Y(p) = \frac{1}{p}$$

Im folgenden soll die praktische Methode angewandt werden.

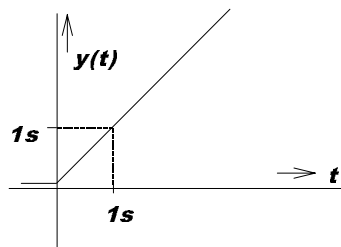
B. Rampen-Funktion

Bild MA1132A

$$y(t) = r(t) \quad \bigcirc \text{-----} \bullet \quad Y(p) = R(p)$$

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} y(t) * e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{\infty} r(t) * e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{\infty} t * e^{-pt} dt$$

$$\text{Tabelle: } \int x e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2} (cx - 1)$$

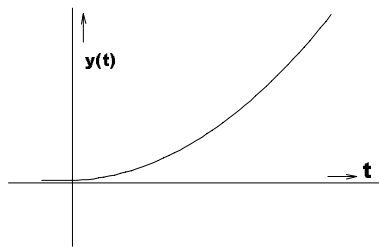
$$Y(p) = \frac{e^{-pt}}{p^2} (-pt - 1) \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{e^{-\infty p}}{p^2} (-\infty p - 1) - \left(\frac{-1}{p^2} \right) = 0 + \frac{1}{p^2}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$\text{Ergebnis: } y(t) = s(t) \quad \bigcirc \text{-----} \bullet \quad Y(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$\mathcal{L}\{s(t)\} = \frac{1}{p^2}$$

C. Potenzfunktion



$$y(t) = t^n * s(t)$$

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{\infty} t^n e^{-pt} dt$$

Bild MA1133A

Ergebnis: (durch n malige partielle Integration)

$$y(t) = t^n \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad Y(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

D. Exponential-Funktion

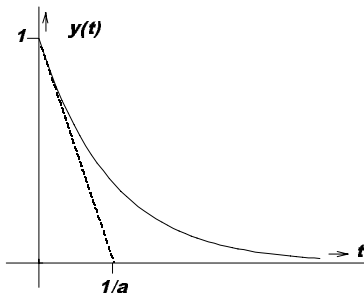


Bild MA114A

$y(t) = e^{-at} * s(t)$ Bedingung: $a > 0$ damit abklingend

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} y(t) * e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-at} * e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-(p+a)t} dt$$

$$Y(p) = \frac{1}{-(p+a)} e^{-(p+a)t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{-1}{p+a} [e^{-(p+a)\infty} - 1]$$

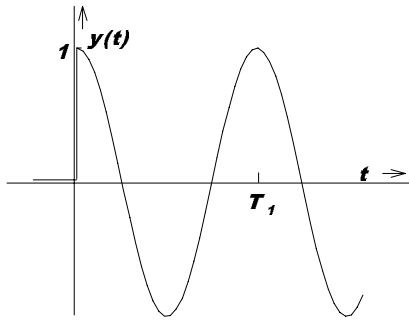
$$\text{Re}(p+a) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 + a > 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-(p+a)t} = 0$$

$$Y(p) = -\frac{1}{p+a} [0 - 1] = \frac{1}{p+a}$$

Ergebnis:

$$y(t) = e^{-at} \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad \frac{1}{p+a} \quad \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{p+a}$$

$$y(t) = e^{at} \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad \frac{1}{p-a} \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$$

E. Kosinus-Funktion

$$y(t) = s(t) * \cos(\omega_1 t)$$

Bild MA114B

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} y(t) * e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{\infty} \cos(\omega_1 t) * e^{-pt} dt$$

Tabelle: $\int e^{cx} \cos(bx) dx = \frac{e^{cx}}{c^2 + b^2} [c * \cos(bx) + b * \sin(bx)]$ $c = -p$ $b = \omega_1$

$$Y(p) = \frac{e^{-pt}}{p^2 + \omega_1^2} \left[-p * \cos(\omega_1 t) + \omega_1 * \sin(\omega_1 t) \right]_{t=0}^{\infty}$$

$$Y(p) = e^{-p \cdot \infty} [\dots] - \frac{e^0}{p^2 + \omega_1^2} [-p * \cos(0) + \omega_1 * \sin(0)]$$

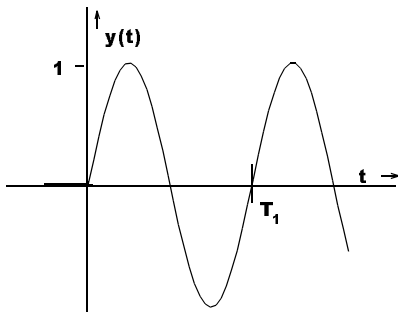
$$Y(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$$

Ergebnis:

$$y(t) = \cos(\omega_1 t) * s(t) \quad \circ \text{-----} \bullet \quad Y(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_1 t)\} = \frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$$

F. Sinus-Funktion



$$y(t) = s(t) * \sin(\omega_1 t)$$

Bild MA114F

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} y(t) * e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{\infty} \sin(\omega_1 t) * e^{-pt} dt$$

Tabelle: $\int e^{cx} \sin(bx) dx = \frac{e^{cx}}{c^2 + b^2} [c * \sin(bx) - b * \cos(bx)]$ $c = -p$ $b = \omega_1$

$$Y(p) = \frac{e^{-pt}}{p^2 + \omega_1^2} \left[-p * \sin(\omega_1 t) - \omega_1 * \cos(\omega_1 t) \right]_{t=0}^{\infty}$$

$$Y(p) = e^{-p \cdot \infty} [\dots] - \frac{e^0}{p^2 + \omega_1^2} [-p * \sin(0) - \omega_1 * \cos(0)]$$

$$Y(p) = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$$

Ergebnis:

$$y(t) = \sin(\omega_1 t) * s(t) \quad \bigcirc \text{-----} \bullet \quad Y(p) = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_1 t) * s(t)\} = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$$

11.5. Korrespondenz-Tabellen

Die bisher im (Abschnitt 11.4) durchgeführten Transformationen werden in der Korrespondenz-Tabelle 1 zusammengefaßt.

$y(t)$	$Y(p)$
$1 = s(t)$	$\frac{1}{p}$
$t = t*s(t) = r(t)$	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\cos(\omega_1 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$
$\sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$

Korrespondenz-Tabelle 1: Grundfunktionen

Tabelle 1 enthält Transformationen von einfachen Grundfunktionen. Die Tabellen 2, 3 und 4 sollen erstmal ohne Herleitung angegeben werden. Die Tabelle 2 stellt für den Praktiker eine sinnvolle Ergänzung der Grundfunktionen dar. Die in den Tabellen 2 und 4 angegebenen Transformationen lassen sich mit Hilfe der Rechenregeln aus den Abschnitten 11.6 und 11.8.2 berechnen. Tabelle 3 enthält einige vom Praktiker nicht so häufig benutzte Transformationen. Die Transformationen der Tabelle 4 werden nicht unbedingt benötigt, sind aber - insbesondere durch Partialbruchzerlegung, Rechenregeln und anderer Umformungen - mit Hilfe von Tabelle 1 berechenbar.

In allen Tabellen gilt für alle $y(t)$: $y(t) = 0$ für $t < 0$

Hinweis 1: Die Korrespondenz-Tabelle 1 sollte man auswendig können (bis auf t^n).

Hinweis 2: Die Transformationen der Korrespondenz-Tabelle 2 sollten ohne Unterlagen mit Hilfe der Rechenregeln aus den Abschnitten 11.6 und 11.9 entwickelt werden können.

Empfehlung: Berechnen der Transformationen der Tabellen 2 und 4 mit Hilfe von Tabelle 1 und den Rechenregeln aus den Abschnitten 11.6 und 11.8.2 als Übung.

$y(t)$	$Y(p)$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$t * e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n * e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} * e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$
$e^{-at} * \cos(\omega_1 t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$
$e^{-at} * \sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$
$\cos(\omega_1 t + \varphi)$	$\frac{p * \cos(\varphi) - \omega_1 * \sin(\varphi)}{p^2 + \omega_1^2}$
$e^{-at} * \cos(\omega_1 t + \varphi)$	$\frac{(p+a) * \cos(\varphi) - \omega_1 * \sin(\varphi)}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$
$e^{-at} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{b-a}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right]$	$\frac{p+b}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$

Korrespondenz-Tabelle 2: Abgeleitete Transformationen

$Y(p)$	$y(t)$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi * t}}$
$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi * t}}$
$\arctan\left(\frac{a}{p}\right)$	$\frac{\sin(at)}{t}$

Korrespondenz-Tabelle 3: Sonderfunktionen

y(t)	Y(p)
$\sin^2(\omega_1 t)$	$\frac{2\omega_1^2}{p(p^2 + 4\omega_1^2)}$
$\cos^2(\omega_1 t)$	$\frac{p^2 + 2\omega_1^2}{p(p^2 + 4\omega_1^2)}$
$\frac{1}{2}[\sin(\omega_1 t) - \omega_1 t * \cos(\omega_1 t)]$	$\frac{\omega_1^3}{(p^2 + \omega_1^2)^2}$
$\frac{1}{2}[\sin(\omega_1 t) + \omega_1 t * \cos(\omega_1 t)]$	$\frac{\omega_1 * p^2}{(p^2 + \omega_1^2)^2}$
$\cos(\omega_1 t) - \frac{\omega_1 t}{2} * \sin(\omega_1 t)$	
$\frac{t}{2} \sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1 * p}{(p^2 + \omega_1^2)^2}$
$t - \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1^2}{p^2(p^2 + \omega_1^2)}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$\left(t - \frac{1}{2}at^2\right)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^3}$
$\left(1 - 2at + \frac{1}{2}a^2t^2\right)e^{-at}$	$\frac{p^2}{(p+a)^3}$
$\frac{e^{-a_1t} - e^{-a_2t}}{a_2 - a_1}$	$\frac{1}{(p+a_1)(p+a_2)}$
$\frac{-a_1e^{-a_1t} + a_2e^{-a_2t}}{a_2 - a_1}$	$\frac{p}{(p+a_1)(p+a_2)}$
$(1 - at)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$
$\frac{e^{-at} + at - 1}{a^2}$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$
$\frac{1 - (at+1)e^{-at}}{a^2}$	$\frac{1}{p(p+a)^2}$
$\left(t - \frac{1}{2}at^2\right)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^3}$
$\left(\frac{1}{2}a^2t^2 - 2at + 1\right)e^{-at}$	$\frac{p^2}{(p+a)^3}$

Korrespondenz-Tabelle 4:

Umformungsergebnisse

11.6. Rechenregeln

11.6.1. Summe von Funktionen

Eine Summe von Funktionen lässt sich einzeln transformieren. Die Laplace Transformierte von einer Summe von Funktionen ist die Summe der Laplace Transformaten der Einzel-Funktionen:

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n y_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}\{y_i(t)\}$$

$$[y_1(t) + y_2(t)] \quad \text{O-----●} \quad [Y_1(p) + Y_2(p)]$$

11.6.2. Multiplikative Konstante

Die Laplace-Transformierte von Konstanten multipliziert mit einer Funktion ist die Laplace-Transformierte der Funktion multipliziert mit der Konstanten.

$$\mathcal{L}\{c \cdot y(t)\} = c \cdot \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$c \cdot y(t) \quad \text{O-----●} \quad c \cdot Y(p)$$

11.6.3. Additive Konstante

Die Laplace-Transformierte einer Funktion plus einer additiven Konstanten ist die Laplace-Transformierte der Funktion plus der Konstanten dividiert durch p. Beweis: Die Laplace-Transformation einer Konstanten c ergibt c/p.

$$\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{p} \quad c \quad \text{O-----●} \quad \frac{c}{p}$$

$$\mathcal{L}\{y(t) + c\} = \mathcal{L}\{y(t)\} + \frac{c}{p} \quad y(t) + c \quad \text{O-----●} \quad Y(p) + \frac{c}{p}$$

Hinweis und Vereinbarung: Bei der Anwendung der Laplace-Transformation in der Praxis wird mit physikalischen Einheiten gerechnet. Die unabhängige Variable ist dabei die Zeit t mit "s" als Einheit. Damit die aufgezeigten Beispiele einfacher zu überblicken sind, wird ab diesem Abschnitt mit einer dimensionslosen Zeit t gerechnet. Dieses bewirkt auch, dass die Kreisfrequenz ω_1 dimensionslos wird.

Übung für Studenten während der Vorlesung:

$\frac{4}{p}$	●----○	4
$\frac{3}{p} + \frac{4}{p+2}$	●----○	$3 + 4e^{-2t}$
$\frac{5p}{p^2+16} - \frac{1}{p}$	●----○	$5\cos(4t) - 1$
$\frac{4*5}{p^2+25} + \frac{8}{p+4}$	●----○	$4\sin(5t) + 8e^{-4t}$
$\frac{48}{p^3} + \frac{24}{p^2}$	●----○	$48\frac{1}{2}t^2 + 24t$
$3t + 5$	○----●	$\frac{3}{p^2} + \frac{5}{p}$
$5\sin(3t) + 4$	○----●	$\frac{5*3}{p^2+9} + \frac{4}{p}$
t^5	○----●	$\frac{120}{p^6}$
$15\cos(8t) + 20$	○----●	$\frac{15p}{p^2+64} + \frac{20}{p}$
$4 + 8e^{-2t}$	○----●	$\frac{4}{p} + \frac{8}{p+2}$

11.6.4. Ähnlichkeitssatz**gesucht:** $\mathcal{L}\{y(at)\}$ **was ist das?** Streckung von a in t-Richtung**bekannt:** $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$

$$\mathcal{L}\{y(at)\} = \int_{t=0}^{\infty} y(at) * e^{-pt} dt$$

Substitution: $at = u \quad t = \frac{u}{a} \quad dt = \frac{du}{a}$

$$\mathcal{L}\{y(at)\} = \frac{1}{a} \int_{u=0}^{\infty} y(u) * e^{-\frac{u}{a}p} du$$

$$\mathcal{L}\{y(at)\} = \frac{1}{a} Y\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$y(at) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{1}{a} Y\left(\frac{p}{a}\right) \quad (11.6)$$

Beispiel 1:

gegeben: $\cos(t) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{p}{p^2 + 1}$

gesucht: $\cos(at) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{1}{a} * \frac{p/a}{(p/a)^2 + 1}$

Lösung: $\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{p}{p^2 + a^2}$

Beispiel 2:

gegeben: $\sin(t) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{1}{p^2 + 1}$

gesucht: $\sin(at) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{1}{a} * \frac{1}{(p/a)^2 + 1} = \frac{1}{a} * \frac{a^2}{p^2 + a^2}$

Lösung: $\sin(at) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{a}{p^2 + a^2}$

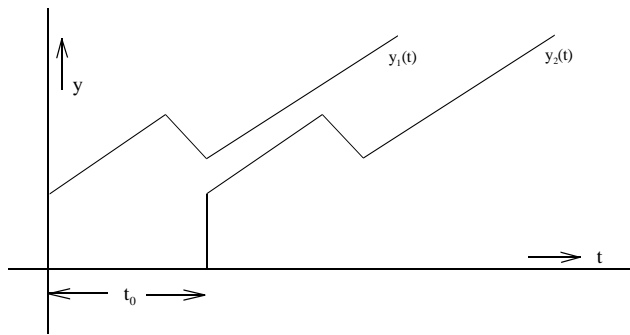
11.6.5. Verschiebungssatz

Bild MA1134A

bekannt: $y_1(t), Y_1(p)$

$$y_2(t) = y_1(t-t_0)$$

gesucht: $Y_2(p)$

$$\mathcal{L}\{y_1(t-t_0)\} = \int_{t=t_0}^{\infty} y_1(t-t_0) * e^{-pt} dt$$

Substitution: $t - t_0 = \tau, \quad t = \tau + t_0, \quad dt = d\tau$

$$\mathcal{L}\{y_1(t-t_0)\} = \int_{\tau=0}^{\infty} y_1(\tau) * e^{-p(\tau+t_0)} d\tau$$

$$\mathcal{L}\{y_1(t-t_0)\} = \int_{\tau=0}^{\infty} y_1(\tau) * e^{-p(\tau+t_0)} d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} y_1(\tau) * e^{-p\tau} * e^{-pt_0} d\tau = e^{-pt_0} \int_{\tau=0}^{\infty} y_1(\tau) * e^{-p\tau} d\tau = e^{-pt_0} Y_1(p)$$

$\mathcal{L}\{y_1(t-t_0)\} = e^{-pt_0} Y_1(p)$	$t_0 > 0$	(11.7)
--	-----------	----------

Eine Verschiebung von $y(t)$ um t_0 in Richtung der Zeitachse bewirkt im Bildbereich eine Multiplikation mit e^{-pt_0} .

Anmerkung: Die Verschiebung im Zeitbereich kann physikalisch als Laufzeit gedeutet werden.

Beispiel: Förderband, Signallaufzeit. Daher erscheinen physikalisch sinnvoll nur Laufzeiten größer Null, welches eine Verschiebung nach rechts bedeutet.

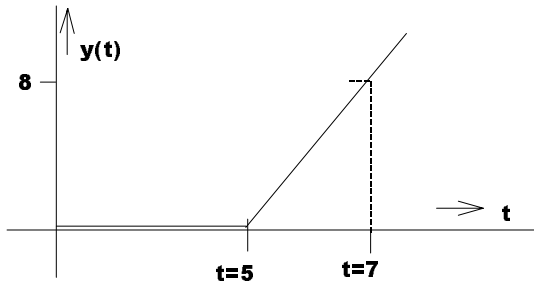
Beispiel 1:

Bild MA1165A

gegeben: Zeitverlauf $y(t)$ nach Bild MA1165A

gesucht: $Y(p)$

Lösung:

$$y(t) = \frac{8}{2} * r(t-5) = 4 * r(t-5) \quad t_0 = 5$$

$$r(t) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{1}{p^2}$$

$$y(t) = 4 * r(t-5) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{4}{p^2} * e^{-5p}$$

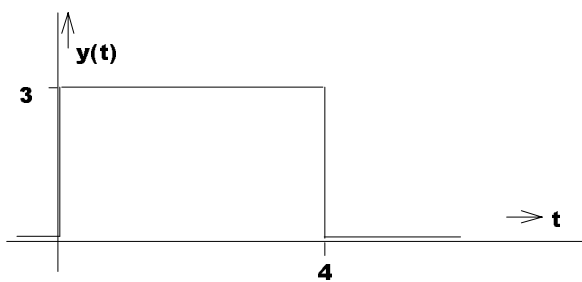
Beispiel 2:

Bild MA1165B

gegeben: Zeitverlauf $y(t)$ nach Bild MA1165B

gesucht: $Y(p)$

Lösung: Aufteilung in zwei Sprungfunktionen:

$$y(t) = 3s(t) - 3s(t-4)$$

$$Y(p) = 3 \frac{1}{p} - 3 \frac{1}{p} e^{-4p} = 3 \frac{1}{p} (1 - e^{-4p})$$

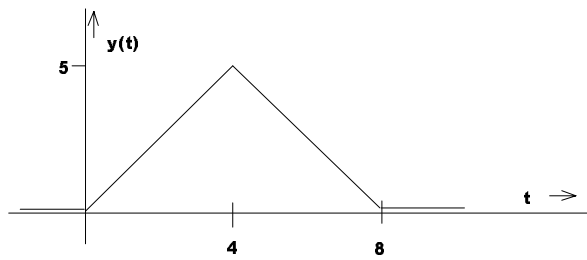
Beispiel 3:

Bild MA1165C

gegeben: Zeitverlauf $y(t)$ nach Bild MA1165C

gesucht: $Y(p)$

Lösung:

$$y(t) = \frac{5}{4}r(t) - \frac{10}{4}r(t-4) + \frac{5}{4}r(t-8)$$

$$Y(p) = \frac{5}{4} \frac{1}{p^2} - \frac{10}{4} \frac{1}{p^2} e^{-4p} + \frac{5}{4} \frac{1}{p^2} e^{-8p}$$

$$Y(p) = \frac{5}{4} \frac{1}{p^2} [1 - 2e^{-4p} + e^{-8p}]$$

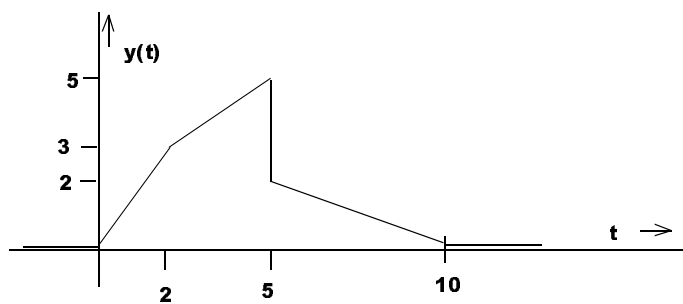
Beispiel 4: (Studenten)

Bild MA1165D

gegeben: Zeitverlauf $y(t)$ nach Bild MA1165B

gesucht: $Y(p)$

11.6.6. Dämpfungssatz

gegeben: $y_1(t)$ $y_2(t) = y_1(t) * e^{-at}$

bekannt: $Y_1(p)$

gesucht: $Y_2(p)$

$$\mathcal{L}\{y_2(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} y_2(t) * e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{\infty} y_1(t) * e^{-at} * e^{-pt} dt$$

$$Y_2(p) = \int_{t=0}^{\infty} y_1(t) * e^{-(p+a)t} dt$$

$$p \rightarrow p + a \quad Y_1(p) = \int_{t=0}^{\infty} y_1(t) * e^{-at} dt$$

$$Y_2(p) = Y_1(p+a)$$

$$\mathcal{L}\{y(t) * e^{-at}\} = Y(p+a)$$

$$y(t) * e^{-at} \quad \circ \text{---} \bullet \quad Y(p+a) \quad (11.8)$$

Beispiel 1:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^2}\right\} = t * e^{-at}$$

Beispiel 2:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2 + \omega_1^2}\right\} = \cos(\omega_1 t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_1^2}\right\} = e^{-at} * \cos(\omega_1 t)$$

Beispiel 3:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_1 t)\} = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at} * \sin(\omega_1 t)\} = \frac{\omega_1}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$$

Fazit: Wird eine Funktion $y_1(t)$ gedämpft (multipliziert) mit e^{-at} , so ergibt sich die Laplace-Transformierte dadurch, daß in der Laplace-Transformierten $Y_1(p)$ das "p" ersetzt wird durch "p + a". Auch die andere Richtung ist nutzbar: Soll ein Ausdruck zurücktransformiert werden und enthält dieser p + a, so muß sich die ergebende Zeitfunktion mit e^{-at} multipliziert werden.

11.6.7. Faltungssatz

Es soll jetzt versucht werden, die Laplace-Transformierte des Faltungsintegrals aus Abschnitt 11.3.6

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) * y_2(t - \tau) d\tau \quad (11.5)$$

zu bilden. Das Faltungsintegral (11.5) wird in die Transformationsvorschrift

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} y(t) e^{-pt} dt \quad (11.1)$$

eingesetzt, wobei die geschweiften Klammern in (A) nur zur Übersicht dienen:

$$Y(p) = \int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) y_2(t-\tau) d\tau \right\} e^{-pt} dt \quad (A)$$

Bei einem Mehrfachintegral kann die Integrationsreihenfolge verändert werden. Hier handelt es sich um ein Doppelintegral mit variablen Grenzen. Die Doppel-Integration nach (A) geschieht über die Integrationsvariablen t und τ . Das gesamte Integrationsgebiet der τ - t -Ebene ist in Bild MA1167A einfach schraffiert dargestellt.

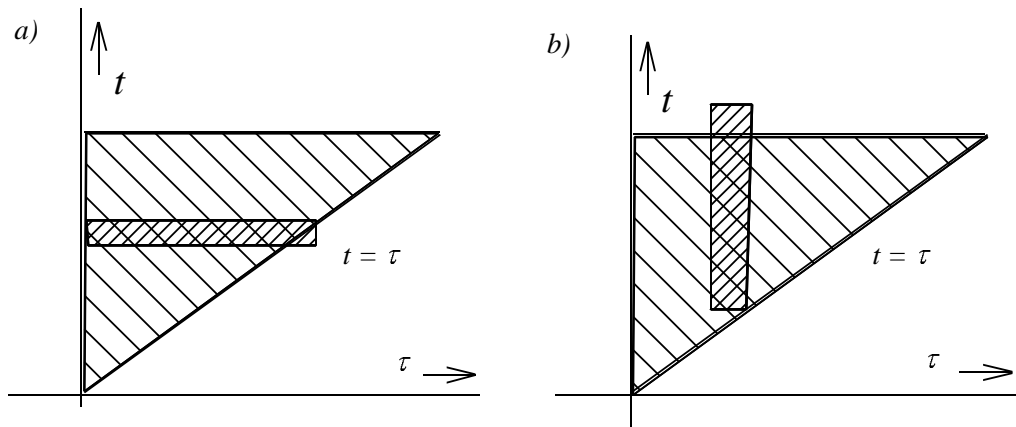


Bild MA1167A

Im **Teilbild a** ist die in (A) angegebene Integrationsreihenfolge angedeutet. Der doppelt schraffierte Balken des Teilbildes a repräsentiert das Integrationsgebiet der geschweiften Klammer von (A). Bei einem in der geschweiften Klammer konstanten t -Wert erfolgt die Integration von $\tau=0$ bis $\tau=t$. Die äußere Integration über $t=0$ bis $t=\infty$ bedeutet die Aufsummierung der im Teilbild a doppelt schraffierten Balken über der Variablen t .

Im **Teilbild b** ist die Vertauschung der Integrationsreihenfolge angedeutet. Der doppelt schraffierte Balken des Teilbildes b verdeutlicht bei konstantem τ die innere Integration über $t=\tau$ bis $t=\infty$. Dieses sollte zur Übersicht bei der Umschreibung des Doppelintegrals (A) wieder in geschweiften Klammern erscheinen. Zur Bildung des äußeren Integrals müssen die doppelt schraffierten Balken des Teilbildes b über $\tau=0$ bis $\tau=\infty$ integriert werden. Damit ergibt die Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$Y(p) = \int_{\tau=0}^{\infty} \left\{ \int_{t=\tau}^{\infty} y_1(\tau) y_2(t-\tau) * e^{-pt} dt \right\} d\tau$$

Der nicht von t abhängige Term $y_1(\tau)$ ist für die innere Integration konstant und kann vor das innere Integral gezogen werden:

$$Y(p) = \int_{\tau=0}^{\infty} y_1(\tau) \left\{ \int_{t=\tau}^{\infty} y_2(t-\tau) * e^{-pt} dt \right\} d\tau \quad (B)$$

Der Ausdruck der geschweiften Klammer in (B) soll diskutiert werden. $y_2(t-\tau)$ ist die um τ verschobene Funktion $y_2(t)$. Für Werte $t < \tau$ ergibt die Funktion $y_2(t-\tau)$ definitionsgemäß Null. Somit kann die Integration auch bei Null begonnen werden:

$$\int_{t=\tau}^{\infty} y_2(t-\tau) * e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{\infty} y_2(t-\tau) * e^{-pt} dt \quad (C)$$

Ein Vergleich mit (11.1) ergibt, daß das obere Integral die Laplace-Transformierte der um τ verschobenen Funktion $y_2(t-\tau)$ ist. Nach dem Verschiebungssatz (11.7) muß, hierzu die Laplace Transformierte mit $e^{-p\tau}$ (t_0 -Verschiebung in t) multipliziert werden. Verschiebungssatz (11.7) und Definition der Transformation (11.1) angewandt auf (C) ergibt:

$$\int_{t=\tau}^{\infty} y_2(t-\tau) * e^{-pt} dt = Y_2(p) * e^{-p\tau} \quad (D)$$

Gleichung (D) wird in (B) eingesetzt:

$$Y(p) = \int_{\tau=0}^{\infty} y_1(\tau) \left\{ Y_2(p) * e^{-p\tau} \right\} d\tau$$

Der von τ unabhängige Term $Y_2(p)$ kann vor das Integral gezogen werden:

$$Y(p) = Y_2(p) * \left\{ \int_{\tau=0}^{\infty} y_1(\tau) * e^{-p\tau} d\tau \right\} \quad (E)$$

Das Integral in der geschweiften Klammer in (E) ist nach (11.1) die Definition der Laplace-Transformation (nur τ anstatt t) für $y_1(\tau)$:

$$\int_{\tau=0}^{\infty} y_1(\tau) * e^{-p\tau} d\tau = Y_1(p) \quad (F)$$

Einsetzen von (F) in (E) ergibt:

$$Y(p) = Y_1(p) * Y_2(p)$$

Fazit: Die Transformation des Faltungsintegrals zweier Funktionen ergibt die Multiplikation der Laplace-Transformierten der Einzelfunktionen.

Nach der oberen Gleichung sind die Funktionen auch vertauschbar. Mit der Definition des Faltungsintegrals und (G) läßt sich angeben:

$y_1(t)$	○---●	$Y_1(p)$	
$y_2(t)$	○---●	$Y_2(p)$	
$y(t) = \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) * y_2(t-\tau) d\tau$	○---●	$Y(p) = Y_1(p) * Y_2(p)$	(11.9)
$y(t) = \int_{\tau=0}^t y_2(\tau) * y_1(t-\tau) d\tau$	○---●	$Y(p) = Y_1(p) * Y_2(p)$	(11.9)

Anwendung des Faltungssatzes

Wenn bei der Rücktransformation $Y(p)$ aus dem Produkt zweier Funktionen in p besteht und die Laplace-Transformierte der Einzel-Produkte bekannt ist, kann $y(t)$ mit Hilfe des Faltungsintegrals berechnet werden.

Beispiel 1:

$$Y(p) = \frac{1}{(p+a)^2} = \frac{1}{(p+a)} * \frac{1}{(p+a)} = Y_1(p) * Y_1(p)$$

$$y_1(t) = e^{-t*a} = y_2(t)$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) * y_2(t-\tau) d\tau$$

$$y_1(\tau) = e^{-\tau*a}$$

$$y_2(t-\tau) = e^{-(t-\tau)a} = e^{-t*a} * e^{\tau*a}$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t e^{-\tau*a} * e^{-t*a} * e^{\tau*a} d\tau = e^{-t*a} \int_{\tau=0}^t d\tau$$

$$y(t) = t * e^{-t*a}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{(p+a)^2} \right\} = t * e^{-a*t}$$

Anmerkung: Beispiel 1 ist mit Hilfe des Dämpfungssatzes schneller transformierter.

Beispiel 2:

$$Y(p) = \frac{\omega_1}{p(p^2 + \omega_1^2)} = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} * \frac{1}{p} = Y_1(p) * Y_2(p)$$

$$Y_1(p) = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} \quad \bullet \text{---} \circ \quad y_1(t) = \sin(\omega_1 t)$$

$$Y_2(p) = \frac{1}{p} \quad \bullet \text{---} \circ \quad y_2(t) = s(t) = 1$$

$$y_1(\tau) = \sin(\omega_1 \tau) \quad y_2(t-\tau) = s(t-\tau)$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) * y_2(t-\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t \sin(\omega_1 \tau) * s(t-\tau) d\tau \quad s(t-\tau) = 1 \text{ für } \tau = 0 \text{ bis } \tau = t$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t \sin(\omega_1 \tau) * 1 d\tau = -\frac{1}{\omega_1} \cos(\omega_1 \tau) \Big|_{\tau=0}^t = -\frac{1}{\omega_1} [\cos(\omega_1 t) - 1] = \frac{1}{\omega_1} [1 - \cos(\omega_1 t)]$$

Anmerkung: Lösung wäre auch mit Partialbruchzerlegung möglich.

Beispiel 3:

$$Y(p) = \frac{\omega_1}{p^2(p^2 + \omega_1^2)} = \frac{1}{p^2} * \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} = Y_1(p) * Y_2(p)$$

$$Y_1(p) = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} \quad \bullet \text{---} \circ \quad y_1(t) = \sin(\omega_1 t)$$

$$Y_2(p) = \frac{1}{p^2} \quad \bullet \text{---} \circ \quad y_2(t) = r(t) = t$$

Nach Beispiel 1, Abschnitt 11.3.6 ergibt das Faltungsintegral der oberen zwei Funktion y_1 und y_2 :

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) * y_2(t-\tau) d\tau = -\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2} + \frac{t}{\omega_1}$$

Damit ist die Laplace-Transformierte von $Y(p)$ gefunden:

$$\frac{\omega_1}{p^2(p^2 + \omega_1^2)} \quad \bullet \text{---} \circ \quad -\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2} + \frac{t}{\omega_1}$$

11.7. Differenzieren und Integrieren von $y(t)$

11.7.1. Differentiation

Gesucht ist die Laplace-Transformierte der Ableitung $y'(t)$. In diesem Kapitel 11 wurde und wird weiterhin die unabhängige Variable t betrachtet. In Abänderung der sonst üblichen Schreibweise soll in diesem Kapitel die Ableitung nach der Variablen t mit Strich anstatt mit Punkt erfolgen.

$$\frac{dy}{dt} = y'$$

Die Laplace-Transformierte von y' wird durch Einsetzen von y' in die Transformationsgleichung (11.1) gebildet:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} y'(t) e^{-pt} dt$$

Das obere Integral kann mit Hilfe der partiellen Integration (siehe Kap. 7.7.2, MA II) berechnet werden:

$$\int f_1 * f_2' dt = f_1 * f_2 - \int f_1' * f_2 dt$$

$$\int_{t=0}^{\infty} f_1 * f_2' = f_1 * f_2 \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} f_1' * f_2 dt$$

$$f_1 = e^{-pt} \quad f_1' = -p * e^{-pt}$$

$$f_2' = y'(t) \quad f_2 = y(t)$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = y(t) * e^{-pt} \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} -p * e^{-pt} * y(t) dt$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = -y(t=0) + p \int_{t=0}^{\infty} y(t) * e^{-pt} dt$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = p * Y(p) - y(t=0)$$

$y'(t) \quad \circ \text{----} \bullet \quad p * Y(p) - y_0$	(11.10)
--	---------

Die Laplace-Transformierte der ersten Ableitung erhält man, in dem man die Laplace-Transformierte der Original-Funktion mit p multipliziert und den Anfangswert bei $t = 0$ subtrahiert.

Differentiation im Zeitbereich bedeutet eine Multiplikation mit p im Bildbereich.

Nochmaliges Differenzieren ergibt die Bildfunktion der **zweiten Ableitung**:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = \mathcal{L}\{[y'(t)]'\} = p * [p * Y(p) - y_0(t=0)] - y'(t=0) = p^2 * Y(p) - p * y_0 - y_0'$$

$\mathcal{L}\{y''(t)\} = p^2 * Y(p) - p * y_0 - y_0'$	(11.11)
---	---------

Dritte Ableitung:

$$\mathcal{L}\{y'''(t)\} = \mathcal{L}\{[y''(t)]'\} = p*[p^2*Y(p) - p_0*y_0 - y_0'] - y_0'' = p^3*Y(p) - p^2*y_0 - p*y_0' - y_0''$$

$$\mathcal{L}\{y'''(t)\} = p^2*Y(p) - p^2*y_0 - p*y_0' - y_0'' \tag{11.12}$$

Vierte Ableitung:

$$y''''(t) \quad \text{O} \text{----} \bullet \quad p^4*Y(p) - p^3*y_0 - p^2*y_0' - p*y_0'' - y_0''' \tag{11.13}$$

Allgemein:

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} = p^n*Y(p) - p^{n-1}*y_0 - p^{n-2}*y_0' - \dots - p*y_0^{(n-2)'} - y_0^{(n-1)'}$$
(11.14)

Zusammenfassung:

$y'(t) \quad \text{O} \text{----} \bullet \quad p*Y(p) - y_0$	(11.10)
$y''(t) \quad \text{O} \text{----} \bullet \quad p^2*Y(p) - p*y_0 - y_0'$	(11.11)
$y'''(t) \quad \text{O} \text{----} \bullet \quad p^3*Y(p) - p^2*y_0 - p*y_0' - y_0''$	(11.12)
$y''''(t) \quad \text{O} \text{----} \bullet \quad p^4*Y(p) - p^3*y_0 - p^2*y_0' - p*y_0'' - y_0'''$	(11.13)
$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} = p^n*Y(p) - p^{n-1}*y_0 - p^{n-2}*y_0' - \dots - p*y_0^{(n-2)'}$	(11.14)

Beispiel 1:

gegeben: $y_0 = 8$

gesucht: $\mathcal{L}\{y'(t)\}$

Lösung: $y'(t) \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad p*Y(p) - y_0$
 $y'(t) \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad p*Y(p) - 8$

Beispiel 2:

gegeben: $y_0 = 10$ $y_0' = 5$

gesucht: $\mathcal{L}\{y''(t)\}$

Lösung: $y''(t) \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad p^2*Y(p) - p*y_0 - y_0'$
 $y''(t) \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad p^2*Y(p) - p*10 - 5$

Beispiel 3:

gegeben: $y_0 = 10$ $y_0' = 8$ $y_0'' = 15$ $y_0''' = 19$

gesucht: $\mathcal{L}\{y''''(t)\}$

Lösung: $y''''(t) \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad p^4*Y(p) - p^3*y_0 - p^2*y_0' - p*y_0'' - y_0'''$
 $y''''(t) \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad p^2*Y(p) - 10*p^3 - 8*p^2 - 15*p - 19$

Beispiel 4:

gegeben: $f(t) = a_4 * y'''' + a_3 * y''' + a_2 * y'' + a_1 * y' + a_0 * y$
 y_0, y_0', y_0'', y_0'''

gesucht: $\mathcal{L}\{y(t)\}$

Lösung:

$y''''(t)$	<input type="radio"/> -----●	$p^4 * Y(p) - p^3 * y_0 - p^2 * y_0' - p * y_0'' - y_0'''$
$y'''(t)$	<input type="radio"/> -----●	$p^3 * Y(p) - p^2 * y_0 - p * y_0' - y_0''$
$y''(t)$	<input type="radio"/> -----●	$p^2 * Y(p) - p * y_0 - y_0'$
$y'(t)$	<input type="radio"/> -----●	$p * Y(p) - y_0$
$y(t)$	<input type="radio"/> -----●	$Y(p)$

$$\begin{aligned}
 F(p) & \quad \text{○-----●} \quad a_4 * [p^4 * Y(p) - p^3 * y_0 - p^2 * y_0' - p * y_0'' - y_0'''] \\
 & \quad + a_3 * [p^3 * Y(p) - p^2 * y_0 - p * y_0' - y_0''] \\
 & \quad + a_2 * [p^2 * Y(p) - p * y_0 - y_0'] \\
 & \quad + a_1 * [p * Y(p) - y_0] \\
 & \quad + a_0 * Y(p)
 \end{aligned}$$

$$F(p) = Y(p) * [a_4 * p^4 + a_3 * p^3 + a_2 * p^2 + a_1 * p + a_0]$$

$$-p^3 * [a_4 * y_0] - p^2 * [a_4 * y_0' + a_3 * y_0] - p * [a_4 * y_0'' + a_3 * y_0' + a_2 * y_0] - [a_4 * y_0''' + a_3 * y_0'' + a_2 * y_0' + a_1 * y_0]$$

11.7.2. Integration

Die Laplace-Transformierte einer nach t abgeleiteten Funktion ergab sich nach Kap. 11.7.1 durch Multiplikation mit p. Versuch: Die Laplace-Transformierte einer nach t integrierten Funktion

$$g(t) = \int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau$$

ergibt sich durch Division mit p.

Behauptung:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p} = G(p)$$

Beweis: Differenzieren mit der Theorie aus Kap. 11.7.1 ergibt:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = p * \mathcal{L}\left\{\int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau\right\} - g(t=0) = p * \frac{F(p)}{p} - \int_{\tau=0}^0 f(\tau) d\tau = F(p)$$

Damit gilt:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{\tau=0}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p} \quad (11.15)$$

Integration im Zeitbereich bedeutet eine Division durch p im Bildbereich.

Beispiel 1:

gegeben: $y(t) = \int z(t) dt$ $Z(p)$

gesucht: $Y(p)$

Lösung: $Y(p) = \frac{Z(p)}{p}$

Beispiel 2:

gegeben: $y(t) = \iint z(t) dt * dt$ $Z(p)$

gesucht: $Y(p)$

Lösung: $Y(p) = \frac{Z(p)}{p^2}$

Beispiel 3:

gegeben: $y(t) = y_1(t) + \int y_2(t) dt + \iint y_3(t) dt * dt$ $Y_1(p), Y_2(p), Y_3(p)$

gesucht: $Y(p)$

Lösung: $Y(p) = Y_1(p) + \frac{1}{p}Y_2(p) + \frac{1}{p^3}Y_3(p)$

Beispiel 4:

gegeben: $y(t) = y_1''(t) + y_2'(t) + \int y_3(t) dt$ $Y_1(p), Y_2(p), Y_3(p)$

$y_1(t=0) = 4$ $y_1'(t=0) = 6$ $y_2(t=0) = 7$

gesucht: $Y(p)$

Lösung: $Y(p) = p^2 * Y_1(p) - 4 * p - 6 + Y_2(p) * p - 7 + \frac{Y_3(p)}{p}$

11.8. Lösen von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten

Die notwendige Theorie zum Lösen von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Laplace-Transformation wurde in Einzelschritten in den vorhergehenden Abschnitten schon aufgezeigt. Im Kap. 11.8 wird die Theorie angewandt zum Lösen von DGLn. Die Schritte dazu sind:

- Transformieren von $y(t)$ und dessen Ableitungen in den Bildbereich
- Transformieren der Anregung vom Zeitbereich in den Bildbereich
- Umformen der DGL nach $Y(p)$
- Transformieren der Lösungsfunktion $Y(p)$ vom Bildbereich in den Zeitbereich

11.8.1. DGLn 1. Ordnung

Die allgemeine lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Anfangsbedingung lautet:

$$y' + a*y = f(t) \quad y(t=0) = y_0$$

Die obige DGL wird in den Bildbereich transformiert:

$$pY(p) - y_0 + a*Y(p) = F(p)$$

und nach $Y(p)$ aufgelöst:

$$(p + a)*Y(p) = F(p) + y_0$$

$$Y(p) = \frac{F(p) + y_0}{p + a}$$

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p + a} + \frac{y_0}{p + a}$$

Der Ausdruck für $Y(p)$ wird wieder vom Bildbereich in den Zeitbereich zurücktransformiert, damit ergibt sich die Lösung der DGL unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(p)}{p + a} \right\} + y_0 * e^{-at}$$

Beispiel:

gegeben: $y' + 4y = 10 \cdot e^{-3t}$ $y_0 = 2$

Transformation der DGL vom Zeit- in den Frequenzbereich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung:

$$p \cdot Y(p) - 2 + 4Y(p) = 10 \frac{1}{p + 3}$$

Auflösen nach Y(p):

$$(p + 4)Y(p) = \frac{10}{p + 3} + 2 = \frac{10 + 2p + 6}{p + 3}$$

$$Y(p) = \frac{2p + 16}{(p + 3)(p + 4)}$$

Partialbruchzerlegung: (siehe Abschnitt 7.7.3 und 11.8.2)

$$Y(p) = \frac{A_1}{p + 3} + \frac{A_2}{p + 4}$$

$$p = -3 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{2(-3) + 16}{-3 + 4} = \frac{10}{1} = 10$$

$$p = -4 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{2(-4) + 16}{-4 + 3} = \frac{+8}{-1} = -8$$

$$Y(p) = \frac{10}{p + 3} - \frac{8}{p + 4}$$

Rücktransformation von Y(p) in den Zeitbereich:

$$y(t) = 10 \cdot e^{-3t} - 8 \cdot e^{-4t}$$

Probe:

Die vollständige Probe ist erforderlich.

Anmerkung:

Die Bild-Funktion Y(p) ist in der Regel eine echt gebrochen rationale Funktion in p. Dieses ist sowohl bedingt durch die Transformation der y und der Ableitungen der y als auch durch die Transformation der Anregung bedingt, die nach den Tabellen in Abschnitt 11.5 echt gebrochen rationale Funktion in p darstellen. Die Rücktransformation erfolgt in der Regel durch Partialbruchzerlegung.

Bevor nun im Abschnitt 11.8.3 die Berechnung von DGLn n-ter Ordnung aufgezeigt wird, soll im nächstem Abschnitt 11.8.2 die Partialbruchzerlegung wiederholt werden.

11.8.2. Rücktransformation durch Partialbruchzerlegung

Die echt gebrochen rationale Funktion

$$Y(p) = \frac{b_m * p^m + b_{m-1} * p^{m-1} + \dots + b_2 * p^2 + b_1 * p + b_0}{p^n + a_{n-1} * p^{n-1} + \dots + a_2 * p^2 + a_1 * p + a_0} \quad m < n$$

soll mit Hilfe von Partialbruchzerlegung zur Rücktransformation vorbereitet werden. Die in Kap. 7.7.3 (Mathematik II) aufgezeigte Anwendung wird wiederholt.

Zusammenfassung Partialbruchzerlegung:

1. Die n Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmen: $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}$
2. Der Ansatz der Partialbruchzerlegung richtet sich nach der Art der Nullstellen. Folgende Arten von Nullstellen können auftreten:
 - einfach reelle Nullstelle
 - mehrfach reelle Nullstellen
 - einfach konjugiert komplexe Nullstelle
 - mehrfach konjugiert komplexe Nullstellen
3. Die Koeffizienten des Ansatzes unter zwei sind zu bestimmen. Dabei gibt es verschiedene Verfahren:
 - Zuhaltmethode (einfach, schnell, nicht für jede Nullstelle möglich)
 - Bestimmte Zahlenwerte für p einsetzen (wenn Zuhaltmethode nicht möglich)
 - Durch Koeffizientenvergleich Gleichungssystem n -ter Ordnung aufstellen (aufwendig, fehleranfällig)
4. Zurücktransformieren in den Zeitbereich

Die oben angeführten vier Punkte sollen in den nächsten vier Unterabschnitten behandelt werden.

11.8.2.1. Nullstellenbestimmung

Ein Polynom n -ter Ordnung weist n Nullstellen auf. Die Methoden zur Bestimmung sämtlicher Nullstellen eines Polynoms wurde in Abschnitt 1.4.6 (Mathematik I) vorgestellt und sollen hier nicht wiederholt werden. Auch schon einige Taschenrechner stellen sämtliche Lösungen eines Polynoms bei Eingabe der Koeffizienten zur Verfügung. Wichtig bei iterativen Lösungen: alle Lösungen finden, nicht eine Lösung irrtümlich doppelt annehmen.

11.8.2.2. Ansätze für die verschiedenen Arten von Nullstellen

Für jede Nullstelle erfolgt ein Teilansatz, der sich nach der Art der Nullstelle richtet.

Teilansatz für eine einfach reelle Nullstelle:

$$Y(p) = \frac{A_1}{p - p_{01}}$$

Teilansatz für eine k fach reelle Nullstelle:

$$p_{01} = p_{02} = \dots = p_{0k}$$

$$Y(p) = \frac{A_1}{p - p_{01}} + \frac{A_2}{(p - p_{01})^2} + \dots + \frac{A_{k-1}}{(p - p_{01})^{k-1}} + \frac{A_k}{(p - p_{01})^k}$$

Teilansatz für eine einfach konjugiert komplexe Nullstelle:

$$Y(p) = \frac{A_1 * p + A_2}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

Teilansatz für eine zweifach konjugiert komplexe Nullstelle:

$$Y(p) = \frac{A_1 * p + A_2}{p^2 + a_1 p + a_0} + \frac{A_3 * p + A_4}{(p^2 + a_1 p + a_0)^2}$$

Gesamtansatz:

Sämtliche Teilansätze müssen zum Gesamtansatz addiert werden. Bei einem Nennerpolynom n-ter Ordnung müssen n verschiedene Koeffizienten vorhanden sein. Achtung: keine gleichen Koeffizienten.

11.8.2.3. Bestimmung der Koeffizienten A_i **11.8.2.3.1. Zuhalttemethode**

Mit Hilfe der Zuhalttemethode können bestimmt werden:

- die Koeffizienten von einfach reellen Nullstellen und
- der Koeffizient der höchsten Potenz von mehrfach reellen Nullstellen.

Die restlichen Koeffizienten von Mehrfach-Nullstellen und Koeffizienten von komplexen Nullstellen können mit Hilfe der Zuhalttemethode nicht bestimmt werden.

Die mathematisch korrekte Methode zur Bestimmung des Koeffizienten A_i der Nullstelle p_{0i} mit Hilfe der Zuhalttemethode lautet:

$$A_i = \lim_{p \rightarrow p_{0i}} \{Y(p) \cdot (p - p_{0i})\}$$

Der Praktiker führt nicht den oberen Grenzübergang durch, sondern hält in der Partialbruch zu zerlegenden Funktion die betrachtete Nullstelle zu und setzt für p den Wert der Nullstelle (i -te Lösung des Polynoms) ein.

Beispiel: (Zuhalttemethode)

gegeben: $Y(p) = \frac{13p + 31}{(p + 3)(p + 2)}$

gesucht: $y(t)$

Lösung:

Nullstellen: $p_{01} = -3$ $p_{02} = -2$

Ansatz: $Y(p) = \frac{A_1}{p + 3} + \frac{A_2}{p + 2}$

$$p = p_{01} = -3 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{13(-3) + 31}{-3 + 2} = \frac{-8}{-1} = 8$$

$$p = p_{02} = -2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{13(-2) + 31}{-2 + 3} = \frac{5}{1} = 5$$

Ergebnis: $Y(p) = \frac{8}{p + 3} + \frac{5}{p + 2}$

11.8.2.3.2. Methode: Bestimmte Zahlenwerte einsetzen

Nachdem der Gesamtansatz

$$Y(p) = \frac{b_m * p^m + b_{m-1} * p^{m-1} + \dots + b_2 * p^2 + b_1 * p + b_0}{p^n + a_{n-1} * p^{n-1} + \dots + a_2 * p^2 + a_1 * p + a_0} = \frac{A_1}{p - p_{01}} + \frac{A_2}{p - p_{02}} + \frac{A_3}{(p - p_{02})^2} + \dots$$

durchgeführt wurde, sollen alle Koeffizienten die nach der Zuhaltmethode bestimmbar sind, auch mit dieser Methode ermittelt werden (schneller!). Für die Ermittlung der restlichen Koeffizienten erfolgt die folgende Betrachtung: Der obere Ansatz muß für alle p Werte gelten, also auch für bestimmte p-Werte. Methode: Im oberen Ansatz werden für p bestimmte Zahlenwerte eingesetzt. Welche? Antwort: fast egal. Durch die Zuhaltmethode sind die Nullstellen schon ausgewertet, also nicht mehr einsetzbar. Theoretisch sind sonst alle einsetzbar. Praktisch aber nimmt man die, die den geringsten Rechenaufwand ergeben. Wenn nicht schon verwendet (als Nullstelle) sind dieses:

$$p = 0 \qquad p = 1 \qquad p = -1 \qquad p = 2 \qquad p = -2 \quad \text{usw.}$$

Zur Bestimmung von k Koeffizienten müssen k bestimmte Werte eingesetzt werden.

Beispiel: (bestimmte Zahlenwerte einsetzen)

gegeben:
$$Y(p) = \frac{11p^2 + 64p + 101}{(p + 5)(p^2 + 6p + 13)}$$

gesucht: Partialbruchzerlegung von Y(p)

Lösung:·

Nullstellen: $p_{01} = -5$ $p_{023} = -3 \pm j2$

Ansatz:
$$Y(p) = \frac{11p^2 + 64p + 101}{(p + 5)(p^2 + 6p + 13)} = \frac{A_1}{p + 5} + \frac{A_2 p + A_3}{p^2 + 6p + 13}$$

Zuhaltmethode: $p = -5 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{11 * (-5)^2 + 64 * (-5) + 101}{(-5)^2 + 6 * (-5) + 13} = 7$

$p = 0$ einsetzen:
$$\frac{101}{5 * 13} = \frac{A_1}{5} + \frac{A_3}{13}$$

$$A_3 = 13 * \left(\frac{101}{5 * 13} - \frac{7}{5} \right) = 2$$

$p = 1$ einsetzen:
$$\frac{11 + 64 + 101}{(1 + 5)(1 + 6 + 13)} = \frac{A_1}{1 + 5} + \frac{A_2 + A_3}{1 + 6 + 13}$$

$$A_2 = (1 + 6 + 13) * \left[\frac{11 + 64 + 101}{(1 + 5)(1 + 6 + 13)} - \frac{7}{1 + 5} \right] - 2 = 4$$

Ergebnis:
$$Y(p) = \frac{7}{p + 5} + \frac{4p + 2}{p^2 + 6p + 13}$$

11.8.2.3.3. Methode: Koeffizienten Vergleich (Gleichungssystem aufstellen)

Prinzip: Der Gesamtansatz wird gleich der gegebenen echt gebrochen rationalen Funktion in p gesetzt. Danach wird mit dem Hauptnenner multipliziert. Der Koeffizientenvergleich der p -Potenzen ergibt ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten.

Beispiel: Koeffizientenvergleich

gegeben:
$$Y(p) = \frac{4p^3 + 47p^2 + 56p + 35}{(p+3)^2(p^2 + 4p + 29)}$$

gesucht: Partialbruchzerlegung von $Y(p)$

Lösung:

Nullstellen: $p_{01} = -3$ $p_{02} = -3$ $p_{034} = -2 \pm j5$

Ansatz:
$$Y(p) = \frac{4p^3 + 47p^2 + 56p + 35}{(p+3)^2(p^2 + 4p + 29)} = \frac{A_1}{(p+3)^2} + \frac{A_2}{(p+3)} + \frac{A_3p + A_4}{p^2 + 4p + 29}$$

Mit Hauptnenner multiplizieren:

$$\begin{aligned} 4p^3 + 47p^2 + 56p + 35 &= A_1 \cdot (p^2 + 4p + 29) + A_2 \cdot (p+3)(p^2 + 4p + 29) + (A_3p + A_4)(p^2 + 4p + 9) \\ &= A_1p^2 + 4A_1p + 29A_1 \\ &\quad + A_2p^3 + 4A_2p^2 + 29A_2p \\ &\quad + 3A_2p^2 + 12A_2p + 87A_2 \\ &\quad + A_3p^3 + 6A_3p^2 + 9A_3p \\ &\quad + A_4p^2 + 6A_4p + 9A_4 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich der p -Potenzen ergibt:

$$\begin{aligned} 4 &= A_2 + A_3 \\ 47 &= A_1 + 7A_2 + 6A_3 + A_4 \\ 56 &= 4A_1 + 41A_2 + 9A_3 + 6A_4 \\ 35 &= 29A_1 + 87A_2 + 9A_4 \end{aligned}$$

Gleichungssystem in Matrix-Form angeben:

A_1	A_2	A_3	A_4		A_1	=	4
0	1	1	0		A_2		47
1	7	6	1		A_3		56
4	41	9	6		A_4		35
29	87	0	9				

Gleichungssystem lösen: $A_1 = 7$ $A_2 = -4$ $A_3 = 8$ $A_4 = 20$

Ergebnis:

$$Y(p) = \frac{7}{(p+3)^2} + \frac{-4}{(p+3)} + \frac{8p + 20}{(p^2 + 3)^2 + 5^2}$$

Kommentar:

Durch das Multiplizieren mit dem Hauptnenner entsteht etwas größerer Aufwand. Die Fehlerwahrscheinlichkeit wird größer. Das obere Beispiel wäre einfacher wie folgt zu lösen:

$$A_1 \text{ nach Zuhaltmethode bestimmen: } p_{01} = -3 \Rightarrow A_1 = \frac{-4 \cdot 3^3 + 47 \cdot 3^2 - 56 \cdot 3 + 35}{3^3 - 4 \cdot 3 + 29} = 7$$

3 Werte in den Ansatz einsetzen:

$$p = 0 \Rightarrow \frac{35}{3^2 \cdot 29} = \frac{7}{3^2} + \frac{A_2}{3} + \frac{A_4}{29}$$

$$p = 1 \Rightarrow \frac{4 + 47 + 56 + 35}{(1 + 3)^2(1 + 4 + 29)} = \frac{7}{(1 + 3)^2} + \frac{A_2}{1 + 3} + \frac{A_3}{1 + 4 + 29} + \frac{A_4}{1 + 4 + 29}$$

$$p = -1 \Rightarrow \frac{-4 + 47 - 56 + 35}{(-1 + 3)^2(1 - 4 + 29)} = \frac{7}{(-1 + 3)^2} + \frac{A_2}{-1 + 3} + \frac{-A_3}{1 - 4 + 29} + \frac{A_4}{1 - 4 + 29}$$

$$87A_2 + 9A_4 = -168$$

$$136A_2 + 16A_3 + 16A_4 = -96$$

$$52A_2 - 4A_3 + 4A_4 = -160$$

Auch die Lösung des oberen Gleichungssystems ergibt die oben schon ermittelte Lösung.

11.8.2.4. Rücktransformation in den Zeitbereich

11.8.2.4.1. Einfach reelle Nullstelle

$$Y(p) = \frac{A_1}{p - p_{01}} \quad \bullet \text{-----} \circ \quad y(t) = A_1 * e^{p_{01}t}$$

Beispiel:

$$Y(p) = 5 \frac{1}{p + 3} \quad \bullet \text{-----} \circ \quad y(t) = 5 * e^{-3t}$$

11.8.2.4.2. Mehrfach reelle Nullstelle

Der Ansatz für die k-fach reelle Nullstelle wird mit Hilfe von Tabellen (Kap. 11.5) und des Dämpfungssatzes (Kap. 11.6.6) zurücktransformiert:

$$Y(p) = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{(p - p_{0i})^i} \quad \bullet \text{-----} \circ \quad y(t) = \sum_{i=1}^k \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} * e^{p_{0i}t}$$

Beispiel:

$$Y(p) = \frac{4}{p + 2} + \frac{6}{(p + 2)^2} + \frac{8}{(p + 2)^3} + \frac{5}{(p + 2)^4}$$

$$y(t) = 4 * e^{-2t} + \frac{6}{1!} t^1 * e^{-2t} + \frac{8}{2!} t^2 * e^{-2t} + \frac{5}{3!} t^3 * e^{-2t}$$

11.8.2.4.3. Einfach konjugiert komplexe Nullstelle

Der Ansatz der einfach konjugiert komplexen Nullstellen:

$$Y(p) = \frac{A_1 p + A_2}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

wird mit Hilfe der Nullstellen

$$p_{012} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = -\frac{a_1}{2} \pm j \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} = p_{0re} \pm p_{0im}$$

in Linearfaktoren zerlegt:

$$Y(p) = \frac{A_1 p + A_2}{(p - p_{01})(p - p_{02})} = \frac{A_1 p + A_2}{[p - (p_{0re} + j p_{0im})][p - (p_{0re} - j p_{0im})]} = \frac{A_1 p + A_2}{[(p - p_{0re}) + j p_{0im}][(p - p_{0re}) - j p_{0im}]}$$

$$Y(p) = \frac{A_1 p + A_2}{(p - p_{0re})^2 + p_{0im}^2} \quad (\text{A})$$

Der Nenner muß mit Hilfe von Real- und Imaginärteil der Nullstelle umgeformt werden.

Einschub: Transformation von Sinus und Kosinusschwingungen:

$$\sin(\omega_1 t) \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$$

$$\cos(\omega_1 t) \quad \text{O} \text{-----} \bullet \quad \frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$$

werden die oberen Schwingungen mit e^{-at} gedämpft, muß nach dem Dämpfungssatz (Kap. 11.6.6) p durch $p + a$ ersetzt werden:

$e^{-at} \sin(\omega_1 t)$	$\text{O} \text{-----} \bullet$	$\frac{\omega_1}{(p + a)^2 + \omega_1^2}$	(11.16)
$e^{-at} \cos(\omega_1 t)$	$\text{O} \text{-----} \bullet$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega_1^2}$	(11.17)

Wenn man die Transformation für $\sin(\omega_1 t)$ und $\cos(\omega_1 t)$ auswendig kann, ist es auch keine Schwierigkeit (11.16) und (11.17) zu behalten. In der Transformation für \sin und \cos müssen mit Hilfe des Dämpfungssatzes nur "p" durch "p+a" ersetzt werden.

Der Ausdruck (A) muß so umgeformt werden, daß p nur im Zusammenhang mit $p - p_{0re}$ erscheint:

$$Y(p) = \frac{A_1(p - p_{0re})}{(p - p_{0re})^2 + p_{0im}^2} + \frac{A_2 + A_1 p_{0re}}{(p - p_{0re})^2 + p_{0im}^2} \quad (\text{B})$$

Dabei wird der Ausdruck der im ersten Term subtrahiert wird im zweiten wieder addiert. Der Ausdruck (B) wird nun so umgeformt, daß sich jeweils ein Faktor multipliziert mit einer rücktransformierten Funktion nach (11.16) und (11.17) ergibt:

$$Y(p) = A_1 * \frac{p - p_{0re}}{(p - p_{0re})^2 + p_{0im}^2} + \frac{A_2 + A_1 p_{0re}}{p_{0im}} * \frac{p_{0im}}{(p - p_{0re})^2 + p_{0im}^2}$$

Der obere Ausdruck kann direkt mit Hilfe von (11.16) und (11.17) in den Zeitbereich zurücktransformiert werden:

$$y(t) = A_1 * e^{p_{0re}t} * \cos(p_{0im}t) + \frac{A_2 + A_1 p_{0re}}{p_{0im}} * e^{p_{0re}t} * \sin(p_{0im}t)$$

Beispiel:

gegeben:
$$Y(p) = \frac{8p + 20}{p^2 + 4p + 29}$$

gesucht: $y(t)$

Lösung:

Nullstellen:
$$p_{012} = -2 \pm \sqrt{4 - 29} = -2 \pm \sqrt{-25} = -2 \pm j5$$

Umformung:
$$Y(p) = \frac{8p + 20}{(p + 2)^2 + 5^2} = \frac{8(p + 2) + 20 - 8*2}{(p + 2)^2 + 5^2} = 8 \frac{(p + 2)}{(p + 2)^2 + 5^2} + \frac{4}{5} \frac{5}{(p + 2)^2 + 5^2}$$

zurücktransformieren:
$$y(t) = \left[8\cos(5t) + \frac{4}{5} \sin(5t) \right] e^{-2t}$$

11.8.2.4.4. Zweifach konjugiert komplexe Nullstelle

Der Ansatz für die zweifach konjugiert komplexe Nullstelle

$$Y(p) = \frac{A_1 * p + A_2}{p^2 + a_1 p + a_0} + \frac{A_3 * p + A_4}{(p^2 - a_1 p + a_0)^2}$$

soll Laplace-transformiert werden. Der erste Summand des oberen Ausdrucks ist schon in Abschnitt 11.8.2.4.3 behandelt worden. Nur die Transformation des zweiten Summanden ist noch zu untersuchen. Damit die Herleitung einfacher wird, kann erst ohne Dämpfung ($a_1=0$) gerechnet werden und danach ist dann der Dämpfungssatz anzuwenden. Es reicht aus, die folgenden zwei Ausdrücke zu transformieren:

$$Y(p) = \frac{p}{(p^2 + \omega_1^2)^2} \tag{A}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega_1^2)^2} \tag{B}$$

Die Ausdrücke (A) und (B) können mit Hilfe des Faltungssatzes zurücktransformiert werden.

Rücktransformation von (A)

$$Y(p) = \frac{p}{(p^2 + \omega_1^2)^2} = \frac{1}{\omega_1} \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} * \frac{\omega_1}{p^2 - \omega_1^2} = \frac{1}{\omega_1} Y_1(p) * Y_2(p)$$

$$Y_1(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} \quad \bullet \text{---} \circ \quad y_1(t) = \cos(\omega_1 t)$$

$$Y_2(p) = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} \quad \bullet \text{---} \circ \quad y_2(t) = \sin(\omega_1 t)$$

Mit Hilfe des Faltungssatzes (11.9) ergibt sich

$$y(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) * y_2(t-\tau) d\tau$$

$$y_1(\tau) = \cos(\omega_1 \tau)$$

$$y_2(t-\tau) = \sin[\omega_1(t-\tau)] = \sin(\omega_1 t - \omega_1 \tau)$$

Tabelle: $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) * \cos(\beta) - \cos(\alpha) * \sin(\beta)$

$$y_2(t-\tau) = \sin(\omega_1 t) * \cos(\omega_1 \tau) - \cos(\omega_1 t) * \sin(\omega_1 \tau)$$

$$y(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_{\tau=0}^t \cos(\omega_1 \tau) * [\sin(\omega_1 t) * \cos(\omega_1 \tau) - \cos(\omega_1 t) * \sin(\omega_1 \tau)] d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{\omega_1} \left[\sin(\omega_1 t) \int_{\tau=0}^t \cos^2(\omega_1 \tau) * d\tau - \cos(\omega_1 t) \int_{\tau=0}^t \cos(\omega_1 \tau) * \sin(\omega_1 \tau) d\tau \right]$$

Tabelle: $\int \cos^2(cx) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2c} \sin(cx) * \cos(cx)$

Tabelle: $\int \cos(cx) * \sin(cx) dx = \frac{1}{2c} \sin^2(cx)$

$$y(t) = \frac{1}{\omega_1} \left[\sin(\omega_1 t) * \left\{ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2\omega_1} \sin(\omega_1 t) * \cos(\omega_1 t) \right\} - \cos(\omega_1 t) * \frac{1}{2\omega_1} * \sin^2(\omega_1 t) \right]_{\tau=0}^t$$

$$y(t) = \frac{1}{\omega_1} \left[\frac{1}{2} t * \sin(\omega_1 t) + \sin^2(\omega_1 t) * \cos(\omega_1 t) * \frac{1}{2\omega_1} - \cos(\omega_1 t) * \sin^2(\omega_1 t) * \frac{1}{2\omega_1} \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{2\omega_1} t * \sin(\omega_1 t)$$

Ergebnis: $\frac{p}{(p^2 + \omega_1^2)^2} \bullet \text{---} \circ \frac{1}{2\omega_1} t * \sin(\omega_1 t)$

Nach der gleichen Methode kann der Ausdruck (B) transformiert werden:

Ergebnis: $\frac{1}{(p^2 + \omega_1^2)^2} \bullet \text{---} \circ \frac{1}{2\omega_1^3} [\sin(\omega_1 t) - \omega_1 t * \cos(\omega_1 t)]$

$$\frac{A_3 * p + A_4}{(p^2 + \omega_1^2)^2} \bullet \text{---} \circ A_3 * \frac{1}{2\omega_1} t \sin(\omega_1 t) + A_4 * \frac{1}{2\omega_1^3} [\sin(\omega_1 t) - \omega_1 t * \cos(\omega_1 t)]$$

Anwendung des Dämpfungssatzes auf den oberen Ausdruck ergibt:

$$\frac{A_3 * p + A_4}{[(p + a)^2 + \omega_1^2]^2} = \frac{A_3 * (p + a) + (A_4 - A_3 * a)}{[(p + a)^2 + \omega_1^2]^2} \bullet \text{---} \circ e^{-at} \left\{ \frac{A_3}{2\omega_1} t \sin(\omega_1 t) + \frac{A_4 - A_3 * a}{2\omega_1^3} [\sin(\omega_1 t) - \omega_1 t * \cos(\omega_1 t)] \right\} \quad (11.18)$$

11.8.3. DGLn n-ter Ordnung

Schema und Vorgehensweise

Die allgemeine lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^n + a_{n-1} * y^{(n-1)} + \dots + a_2 * y'' + a_1 * y' + a_0 y = f(t)$$

und den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_0' \dots y^{(n-1)}(0) = y_0^{n-1'}$$

wir Laplace-transformiert:

$$p^n * Y(p) + a_{n-1} * p^{n-1} Y(p) + \dots + a_2 * p^2 Y(p) + a_1 * p * Y(p) + a_0 * Y(p)$$

$$+ b_{n-1} p^{n-1} + b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Die Terme mit den Koeffizienten b_i resultieren aus der Zusammenfassung der n Anfangsbedingungen. Aufgelöst nach $Y(p)$ ergibt sich:

$$Y(p) = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\} - b_{n-1} p^{n-1} - b_{n-2} p^{n-2} - \dots - b_2 p^2 - b_1 p - b_0}{p^n + a_{n-1} * p^{n-1} + \dots + a_2 * p^2 + a_1 * p + a_0}$$

$y(t)$ als Lösung der DGL erhält man durch Zurücktransformation:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\}$$

Durch die Laplace-Transformation wird die DGL für y in eine algebraische Gleichung mit der Bildfunktion $Y(p)$ überführt. Die transformierte DGL wird nach $Y(p)$ aufgelöst und in den Zeitbereich zurücktransformiert.

Weil auch die Laplace-Transformation der Anregung $f(t)$ in der Regel eine echt gebrochene rationale Funktion in p ergibt, ist $Y(p)$ in der Regel eine echt gebrochene rationale Funktion in p , die mit Hilfe von Partialbruchzerlegung (Abschnitt 11.8.2) zurücktransformiert wird.

Vergleich mit Lösung im Zeitbereich

Die Laplace-Transformation der DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

ergab:

$$Y(p) = \frac{F(p) + G(p)}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

Die DGL im Zeitbereich geht mit Hilfe der Laplace-Transformation über in eine algebraische Gleichung in p , die mit Hilfe der Partialbruchzerlegung in den Zeitbereich zurücktransformiert werden muß.

Die Nullstellen des Nennerpolynoms in p sind dabei zu bestimmen:

$$p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_0 = 0 \quad (\text{A})$$

Homogene Lösung der DGL im Zeitbereich

Wiederholung aus Kap. 10: Zur Lösung der homogenen DGL

$$Y_{hom}^{(n)} + a_{n-1} y_{hom}^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = 0$$

mußten die Nullstellen des charakteristische Polynoms in λ bestimmt werden:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_0 = 0 \quad (\text{B})$$

Ergebnis des Vergleichs:

Sowohl bei der Lösung im Zeitbereich als auch mit Laplace müssen die Nullstellen eines Polynoms n -ter Ordnung bestimmt werden.

Laplace:	in p	nach (A)
Zeitbereich:	in λ	nach (B)

Die Nullstellen p_0 oder λ_0 werden auch Eigenwerte genannt. Nach Abschnitt 10.12 müssen die Nullstellen der Eigenwerte in der linken Hälfte der komplexen Ebene liegen, damit die Lösung stabil ist. Auch das Hurwitz-Kriterium (Kap. 10.12) läßt sich auf das Nennerpolynom in p anwenden.

Beispiel 1:

gegeben: $y'' + 12y' + 32y = 160$

$$y_0 = 8 \quad y'_0 = -36$$

Laplace-Transformation:

$$\mathcal{L}\{y''\} = p^2 Y(p) - p y_0 - y'_0 = p^2 Y(p) - 8p + 36$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = p Y(p) - y_0 = p Y(p) - 8$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(p)$$

$$[p^2 Y(p) - 8p + 36] + 12[p Y(p) - 8] + 32Y(p) = \frac{160}{p}$$

Auflösen nach Y(p):

$$Y(p)[p^2 + 12p + 32] = \frac{160}{p} + 8p - 36 + 12 \cdot 8 = \frac{160}{p} + 8p + 60$$

$$Y(p)[p^2 + 12p + 32] = \frac{8p^2 + 60p + 160}{p}$$

$$Y(p) = \frac{8p^2 + 60p + 160}{p[p + 12p + 32]}$$

Partialbruchzerlegung:

Nullstellen Nenner: $p_{01} = 0$ $p_{023} = -6 \pm \sqrt{36 - 32}$ $p_{023} -6 \pm 2 = -8, -4$

$$Y(p) = \frac{8p^2 + 60p + 160}{p(p+4)(p+8)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p+4} + \frac{A_3}{p+8}$$

$$p = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{160}{4 \cdot 8} = 5$$

$$p = -4 \Rightarrow A_2 = \frac{8 \cdot 16 - 60 \cdot 4 + 160}{-4 \cdot (-4 + 8)} = -3$$

$$p = -8 \Rightarrow C = \frac{8 \cdot 64 - 60 \cdot 8 + 160}{(-8) \cdot (-8 + 4)} = 6$$

$$Y(p) = \frac{5}{p} - \frac{3}{p+4} + \frac{6}{p+8}$$

Rücktransformation in den Zeitbereich: $y(t) = 5 - 3e^{-4t} + 6e^{-8t}$

vollständige Probe: wird empfohlen

Beispiel 2: (Studenten)

gegeben: $y'' + 10y' + 24y = 120$

$$y_0 = 2 \quad y'_0 = 4$$

Ergebnis: $y(t) = -7e^{-4t} + 4e^{-6t} + 5$

Beispiel 3:

gegeben: $y'' + 4y' + 13y = 40\cos(t)$

$$y_0 = 5 \quad y'_0 = 0$$

siehe auch: Beispiel 2, Kap. 10.7.2

Laplace-Transformation der DGL und Umstellen nach Y(p):

$$y \quad \text{O} \text{ ---- } \bullet \quad Y(p)$$

$$y' \quad \text{O} \text{ ---- } \bullet \quad p*Y(p) - y_0 = p*Y(p) - 5$$

$$y'' \quad \text{O} \text{ ---- } \bullet \quad p^2*Y(p) - y_0*p - y'_0 = p^2*Y(p) - 5p$$

$$40\cos(t) \quad \text{O} \text{ ---- } \bullet \quad 40 \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$[p^2*Y(p) - 5p] + 4[p*Y(p) - 5] + 13Y(p) = \frac{40p}{p^2 + 1}$$

$$Y(p)[p^2 + 4p + 13] = \frac{40p}{p^2 + 1} + 5p + 4*5 = \frac{40p + (5p + 20)(p^2 + 1)}{(p^2 + 1)}$$

$$Y(p) = \frac{5p^3 + 20p^2 + 45p + 20}{(p^2 + 1)(p^2 + 4p + 13)}$$

Nullstellen des Nenners bestimmen:

$$p_{012} = \pm j1 \quad p_{034} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm j3$$

Partialbruchzerlegung:

$$Y(p) = \frac{5p^3 + 20p^2 + 45p + 20}{(p^2 + 1)(p^2 + 4p + 13)} = \frac{A_1p + A_2}{p^2 + 1} + \frac{A_3p + A_4}{p^2 + 4p + 13}$$

$$p = 0 \Rightarrow \frac{20}{1*13} = \frac{A_2}{1} + \frac{A_4}{13}$$

$$p = 1 \Rightarrow \frac{5 + 20 + 45 + 20}{(1 + 1)(1 + 4 + 13)} = \frac{A_1 + A_2}{1 + 1} + \frac{A_3 + A_4}{1 + 4 + 13}$$

$$p = -1 \Rightarrow \frac{-5 + 20 - 45 + 20}{(1 + 1)(1 - 4 + 13)} = \frac{-A_1 + A_2}{1 + 1} + \frac{-A_3 + A_4}{1 - 4 + 13}$$

$$p = 2 \Rightarrow \frac{5*8 + 20*4 + 45*2 + 20}{(2^2 + 1)(4 + 4*2 + 13)} = \frac{2*A_1 + A_2}{2^2 + 1} + \frac{2*A_3 + A_4}{4 + 4*2 + 13}$$

$$13A_2 + A_4 = 20$$

$$18A_1 + 18A_2 + 2A_3 + 2A_4 = 90$$

$$-10A_1 + 10A_2 - 2A_3 + 2A_4 = -10$$

$$50A_1 + 25A_2 + 10A_3 + 5A_4 = 230$$

Gleichungssystem in Matrix-Form angeben:

A_1	A_2	A_3	A_4
0	13	0	1
18	18	2	2
-10	10	-2	2
50	25	10	5

A_1
A_2
A_3
A_4

 $=$

20
90
-10
230

Gleichungssystem lösen:

$$A_1 = 3 \quad A_2 = 1 \quad A_3 = 2 \quad A_4 = 7$$

Ergebnis der Partialbruchzerlegung:

$$Y(p) = \frac{3p+1}{p^2+1} + \frac{2p+7}{(p+2)^2+3^2} = 3\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{2(p+2)}{(p+2)^2+3} + \frac{7-2*2}{3} \frac{3}{(p+2)^2+3^2}$$

Rücktransformation:

$$y(t) = 3\cos(t) + \sin(t) + e^{-2t}[2\cos(3t) + \sin(3t)]$$

Beispiel 4: (Studenten)

gegeben: $y'' + 6y' + 34y = 68$

$$y_0 = 8 \quad y'_0 = 7$$

Ergebnis: $y(t) = 2 + e^{-3t}[6\cos(5t) - 5\sin(5t)]$

Beispiel 5:

gegeben: $2y'' + 8y' + 8y = 12e^{-2t} + 14e^{-3t}$
 $y_0 = 5 \quad y'_0 = 15$

$$y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2t} + 7e^{-3t}$$

Laplace Transformation der DGL:

$$y'' \quad \text{O} \text{----} \bullet \quad p^2 * Y(p) - y_0 * p - y'_0 = p^2 * Y(p) - 5p - 15$$

$$y' \quad \text{O} \text{----} \bullet \quad p * Y(p) - y_0 = p * Y(p) - 5$$

$$y \quad \text{O} \text{----} \bullet \quad Y(p)$$

$$[p^2 * (Y(p) - 5p - 15)] + 4[p * Y(p) - 5] + 4Y(p) = \frac{6}{p+2} + \frac{7}{p+3}$$

$$Y(p)[p^2 + 4p + 4] = \frac{6}{p+2} + \frac{7}{p+3} + 5p + 35 = \frac{6(p+3) + 7(p+2) + (5p+35)(p^2+5p+6)}{(p+2)(p+3)}$$

$$Y(p) = \frac{6p + 18 + 7p + 14 + 5p^3 + 35p^2 + 25p^2 + 175p + 30p + 210}{(p+2)(p+3)(p^2+4p+4)}$$

Nullstellen bestimmen: $p_{01} = -2 \quad p_{02} = -3 \quad p_{034} = -2 \pm \sqrt{4-4} = -2$

Partialbruchzerlegung:

$$Y(p) = \frac{5p^3 + 60p^2 + 218p + 242}{(p+2)^3(p+3)} = \frac{A_1}{(p+2)^3} + \frac{A_2}{(p+2)^2} + \frac{A_3}{p+2} + \frac{A_4}{p+3}$$

$$p = -2 \Rightarrow \quad A_1 = \frac{-5*8 + 60*4 - 218*2 + 242}{-2+3} = 6$$

$$p = -3 \Rightarrow \quad A_4 = \frac{-5*27 + 60*9 - 218*3 + 242}{(-3+2)^3} = 7$$

$$p = 0 \Rightarrow \quad \frac{242}{2^3*3} = \frac{6}{2^3} + \frac{A_2}{2^2} + \frac{A_3}{2} + \frac{7}{3}$$

$$p = 1 \Rightarrow \quad \frac{5 + 60 + 218 + 242}{3^3*4} = \frac{6}{3^3} + \frac{A_2}{3^2} + \frac{A_3}{3} + \frac{7}{4}$$

$$6A_2 + 12A_3 = 168$$

$$12A_2 + 36A_3 = 312$$

$$A_2 = 32 \quad A_3 = -2$$

Ergebnis der Partialbruchzerlegung:
$$Y(p) = \frac{6}{(p+2)^3} + \frac{32}{(p+2)^2} + \frac{-2}{p+2} + \frac{7}{p+3}$$

Ergebnis der Rücktransformation: $y(t) = e^{-2t} * [3t^2 + 32t - 2] + 7e^{-3t}$

Beispiel 6: (Studenten)

gegeben: $y'' + 4y' + 40y = 200$
 $y_0 = 7 \quad y'_0 = 20$

Ergebnis: $y(t) = 5 + e^{-2t} [2 * \cos(6t) + 4 * \sin(6t)]$

weitere Aufgaben rechnen

11.9. Systeme von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten

11.9.1. n-verkoppelte DGLn 1. Ordnung

Drei verkoppelte lineare DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten in allgemeiner Form werden in Matrix-Schreibweise angegeben:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} \quad (11.19)$$

Mit den Vektoren und Matrizen

$$\bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

läßt sich die allgemeine Schreibweise eines Systems von n-verkoppelten linearen DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten angeben:

$$\bar{y}' = \bar{A} * \bar{y} + \bar{g}(t) \quad (11.20)$$

mit den Laplace-Transformierten in Vektor-Schreibweise

$$\bar{Y}(p) = \begin{pmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \\ Y_3(p) \end{pmatrix} \quad \bar{G}(p) = \begin{pmatrix} G_1(p) \\ G_2(p) \\ G_3(p) \end{pmatrix}$$

wird die obere Matrixgleichung Laplace-transformiert:

$$\bar{E} * \bar{Y}(p) * p - \bar{y}(0) = \bar{A} * \bar{Y}(p) + \bar{G}(p)$$

Nach $\bar{Y}(p)$ aufgelöst ergibt sich:

$$\bar{Y}(p) * [p * \bar{E} - \bar{A}] = \bar{G}(p) + \bar{y}(0)$$

$$\bar{Y}(p) = [p * \bar{E} - \bar{A}]^{-1} [\bar{G}(p) + \bar{y}(0)] \quad (11.21)$$

Dieses ergibt für den Bildvektor und seinen Komponenten einen Ausdruck in p der zurücktransformiert werden muß. Die Schwierigkeit besteht hier in der Inversion einer n mal n Matrix, die nicht nur Zahlen, sondern auch die Laplace-Variable p enthält. Die numerische Lösung ist nicht ohne weiteres möglich. In allgemeiner Schreibweise lassen sich die Lösungen für alle y_i in Matrix-Schreibweise angeben:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ [p * \bar{E} - \bar{A}]^{-1} * [\bar{G}(p) + \bar{y}(0)] \} \quad (11.21)$$

Beispiel

gegeben:

$$\begin{aligned}y_1' &= -5y_1 + 3y_2 + 10 \\y_2' &= 1y_1 - 3y_2 \\y_1(0) &= 2 \\y_2(0) &= 3\end{aligned}$$

Lösung:

$$\bar{y}' = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} * \bar{y} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{Y}(p) * p - \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \bar{Y}(p) + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{p}$$

$$\begin{pmatrix} p+5 & -3 \\ -1 & p+3 \end{pmatrix} \bar{Y}(p) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{p} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Y}(p) = \frac{1}{(p+5)(p+3) - (-1)(-3)} \begin{pmatrix} p+3 & 3 \\ 1 & p+5 \end{pmatrix} \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 10+2p \\ 3p \end{pmatrix}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p[p^2 + 8p + 12]} \begin{pmatrix} (p+3)*(10+2p) + 3*3p \\ (10+2p) + (p+5)3p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \end{pmatrix}$$

$$Y_1(p) = \frac{2p^2 + 25p + 30}{p(p^2 + 8p + 12)} \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} - 2e^{-6t}$$

$$Y_2(p) = \frac{3p^2 + 17p + 10}{p(p^2 + 8p + 12)} \quad \Rightarrow \quad y_2(t) = \frac{5}{6} + \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-6t}$$

Die oberen zwei Bildfunktionen $Y_1(p)$ und $Y_2(p)$ wurden mit Hilfe von Matrizen, Vektoren und Laplace berechnet. Die hier nicht durchgeführte Partialbruchzerlegung ist schon bekannt.

11.9.2. Diskrete Werte-Berechnung

Behauptung: Bei dem linearen DGL-System (11.20) mit konstanten Koeffizienten

$$\bar{y}' = \bar{A} * \bar{y} + \bar{g}(t)$$

läßt sich der Zeitverlauf zu diskreten Zeitpunkten $t_i = k * \Delta t$ bei abschnittsweiser konstanter Anregung (über Δt) wie folgt berechnen:

$$\bar{y}(k\Delta t) = \bar{M}_1 * \bar{y}(k-1) + \bar{M}_2 * \bar{g}(k-1) \quad (11.23)$$

Beweis: Die Lösung von (11.20) ergab:

$$\bar{Y}(p) = (p * \bar{E} - \bar{A})^{-1} * \bar{y}(0) + [p * \bar{E} - \bar{A}]^{-1} * \bar{G}(p) \quad (A)$$

mit abschnittsweise Konstanten $\bar{g}(t) = \bar{g}(t=0)$

$$\bar{g}(t) = \text{const} = \bar{g}(0) = \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ \dots \\ g_n(0) \end{pmatrix}$$

folgt die Laplace-Transformation:

$$\bar{G}(p) = \bar{g}(0) \frac{1}{p}$$

Damit kann angegeben werden:

$$\bar{Y}(p) = (p * \bar{E} - \bar{A})^{-1} * \bar{y}(0) + [p * \bar{E} - \bar{A}]^{-1} * \frac{1}{p} * \bar{g}(0)$$

Die Rücktransformation ergibt:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(p * \bar{E} - \bar{A})^{-1}\} * \bar{y}(0) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} [p * \bar{E} - \bar{A}]^{-1}\right\} * g(0)$$

$$y(\Delta t) = \mathcal{L}^{-1}\{(p * \bar{E} - \bar{A})^{-1}\} \Big|_{t=\Delta t} * \bar{y}(0) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} [p * \bar{E} - \bar{A}]^{-1}\right\} \Big|_{t=\Delta t} * g(0) \quad (B)$$

Der Vergleich mit der oberen Gleichungen (A) und (B) liefert:

$$\bar{M}_1 = \mathcal{L}^{-1}\{(p * \bar{E} - \bar{A})^{-1}\} \Big|_{t=\Delta t} \quad (11.24)$$

$$\bar{M}_2 = \mathcal{L}^{-1}\left\{(p * \bar{E} - \bar{A})^{-1} * \frac{1}{p}\right\} \Big|_{t=\Delta t} \quad (11.25)$$

\bar{M}_1 wird die Transitionsmatrix genannt. Dieses Verfahren wird besonders eingesetzt bei Online-Berechnungen von DGLn

- Prozeßberechnungen und Regelung
- Simulatoren

Beispiel:

$$\text{gegeben: } \bar{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} * \bar{y} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Delta t = 0.1$$

$$\text{gesucht: } \bar{M}_1, \bar{M}_2 \quad \text{für } \bar{y}(k\Delta t) = \bar{M}_1 * \bar{y}(k-1) + \bar{M}_2 * \bar{g}(k-1)$$

$$\text{Vergleich: } \bar{A} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \bar{g}(t) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach (11.24) kann \bar{M}_1 berechnet werden:

$$\bar{M}_1 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (p * E - \bar{A})^{-1} \right\} \Big|_{t=\Delta t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right]^{-1} \right\} \Big|_{t=\Delta t}$$

$$\bar{M}_1 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} p+3 & 3 \\ 1 & p+5 \end{pmatrix}^{-1} \right\} \Big|_{t=\Delta t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p^2 + 8p + 12)} \begin{pmatrix} p+5 & -3 \\ -1 & p+3 \end{pmatrix} \right\} \Big|_{t=\Delta t}$$

$$\bar{M}_1 = \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{array}{cc} \frac{p+5}{(p+2)(p+6)} & \frac{-3}{(p+2)(p+6)} \\ \frac{-1}{(p+2)(p+6)} & \frac{p+3}{(p+2)(p+6)} \end{array} \right) \Big|_{t=\Delta t} = \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{array}{cc} \frac{3/4}{p+2} + \frac{1/4}{p+6} & \frac{-3/4}{p+2} + \frac{3/4}{p+6} \\ \frac{-1/4}{p+2} + \frac{1/4}{p+6} & \frac{1/4}{p+2} + \frac{3/4}{p+6} \end{array} \right) \Big|_{t=\Delta t=0.1} \quad \textcircled{A}$$

$$\bar{M}_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (3 * e^{-2\Delta t} + 1 * e^{-6\Delta t}) & (-3 * e^{-2\Delta t} + 1 * e^{-6\Delta t}) \\ (-1 * e^{-2\Delta t} + 1 * e^{-6\Delta t}) & (1 * e^{-2\Delta t} + 3 * e^{-6\Delta t}) \end{pmatrix} \Big|_{\Delta t=0.1} = \begin{pmatrix} 0.7513 & -0.4768 \\ -0.06748 & 0.6163 \end{pmatrix}$$

Nach (11.25) kann \bar{M}_2 berechnet werden:

$$\bar{M}_2 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (p * E - \bar{A})^{-1} * \frac{1}{p} \right\} \Big|_{t=\Delta t} = \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{array}{cc} \frac{p+5}{(p+2)(p+6)p} & \frac{-3}{(p+2)(p+6)p} \\ \frac{-1}{(p+2)(p+6)p} & \frac{p+3}{(p+2)(p+6)p} \end{array} \right) \Big|_{t=\Delta t}$$

Die innere Klammer des oberen rechten Ausdrucks kann schnell angegeben werden, weil der Ausdruck (A) bei der Berechnung von \bar{M}_1 in der inneren Klammer nur durch p dividiert werden muß.

$$\bar{M}_2 = \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{array}{cc} \frac{-3/8}{p+2} + \frac{-1/24}{p+6} + \frac{5/12}{p} & \frac{3/8}{p+2} + \frac{-1/8}{p+6} + \frac{-1/4}{p} \\ \frac{1/8}{p+2} + \frac{-1/24}{p+6} + \frac{-1/12}{p} & \frac{-1/8}{p+2} + \frac{-1/8}{p+6} + \frac{1/4}{p} \end{array} \right) \Big|_{t=\Delta t=0.1}$$

$$\bar{M}_2 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} (-9 * e^{-2\Delta t} - 1 * e^{-6\Delta t} + 10) & (9 * e^{-2\Delta t} - 3 * e^{-6\Delta t} - 6) \\ (3 * e^{-2\Delta t} - 1 * e^{-6\Delta t} - 2) & (-3 * e^{-2\Delta t} - 3 * e^{-6\Delta t} + 6) \end{pmatrix} \Big|_{t=0.1} = \begin{pmatrix} 0.08678 & -0.01158 \\ -0.00386 & 0.07908 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7513 & -0.4768 \\ -0.06748 & 0.6163 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.08678 & -0.01158 \\ -0.00386 & 0.07908 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11.9.3. Gekoppelte DGLn höherer Ordnung

Prinzip:

Gekoppelte DGLn höherer Ordnung bestehen aus mehreren DGLn für mehrere Variable. Die Ableitungen in den DGLn weisen eine höhere Ordnung als 1 auf. Die DGLn werden alle Laplace-transformiert. Dieses ergibt ein lineares Gleichungssystem für die Bildfunktionen der Variablen. Im Gleichungssystem ist auch die Laplace Variable p enthalten. Das Gleichungssystem wird nach Bildfunktionen aufgelöst und in den Zeitbereich zurück-transformiert.

Beispiel:

$$\begin{array}{llll} \text{gegeben:} & y'' + 17z' + 8y = 0 & y(0) = 1 & y'(0) = 0 \\ & z'' + 3y' + 18z = 0 & z(0) = 0 & z'(0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Laplace-Transformation:} \\ p^2 * Y(p) - p + 17pZ(p) + 8Y(p) = 0 \\ p^2 * Z(p) + 3p * Y(p) - 3 + 18Z(p) = 0 \end{array}$$

$$\text{Umformung:} \quad \begin{pmatrix} (p^2 + 8) & 17p \\ 3p & (p^2 + 18) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(p) \\ Z(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 3 \end{pmatrix}$$

Auflösung nach $Y(p)$ und $Z(p)$:

$$\begin{pmatrix} Y(p) \\ Z(p) \end{pmatrix} = \frac{1}{(p^2 + 8)(p^2 + 18) - 3p * 17p} \begin{pmatrix} (p^2 + 18) & -17p \\ -3p & (p^2 + 8) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Y(p) = \frac{p^3 + 18p - 51p}{p^4 + 8p^2 + 18p^2 + 144 - 51p^2} = \frac{p^3 - 33p}{p^4 - 25p^2 + 144}$$

$$Z(p) = \frac{-3p^2 + 3p^2 + 24}{p^4 - 25p^2 + 144} = \frac{24}{p^4 - 25p^2 + 144}$$

Partialbruchzerlegung von $Y(p)$ und $Z(p)$:

Nullstellen des Nenners

$$p_0^2 = 12.5 \pm \sqrt{12.5^2 - 144} = 12.5 \pm 3.5$$

$$p_{012}^2 = 16 \quad p_{01} = 4 \quad p_{02} = -4$$

$$p_{034}^2 = 9 \quad p_{03} = 3 \quad p_{04} = -3$$

$$Y(p) = \frac{p^3 - 33p}{(p - 4)(p + 4)(p - 3)(p + 3)} = \frac{A_1}{p - 4} + \frac{A_2}{p + 4} + \frac{A_3}{p - 3} + \frac{A_4}{p + 3}$$

$$Z(p) = \frac{24}{(p - 4)(p + 4)(p - 3)(p + 3)} = \frac{B_1}{p - 4} + \frac{B_2}{p + 4} + \frac{B_3}{p - 3} + \frac{B_4}{p + 3}$$

Zuhaltemethode (RN = Restnenner)

$$p = +4 \quad \text{RN} = (4 + 4)(4 - 3)(4 + 3) = 8 \cdot 1 \cdot 7 = 56$$

$$p = -4 \quad \text{RN} = (-4 - 4)(-4 - 3)(-4 + 3) = (-8) \cdot (-7) \cdot (-1) = -56$$

$$p = +3 \quad \text{RN} = (3 - 4)(3 + 4)(3 + 3) = (-1) \cdot (7) \cdot (6) = -42$$

$$p = -3 \quad \text{RN} = (-3 - 4)(-3 + 4)(-3 - 3) = (-7) \cdot (1) \cdot (-6) = 42$$

$$\text{Beispiel: } A_1\text{-Berechnung } p = 4 \Rightarrow A_1 = (4^3 - 33 \cdot 4) / \text{RN} = -68/56$$

$$Y(p) = \frac{-68/56}{p-4} + \frac{68/-56}{p+4} + \frac{-72/-42}{p-3} + \frac{72/42}{p+3}$$

$$Z(p) = \frac{24/56}{p-4} + \frac{24/-56}{p+4} + \frac{24/-42}{p-3} + \frac{24/42}{p+3}$$

$$Y(p) = -\frac{17}{14} \frac{1}{p-4} - \frac{17}{14} \frac{1}{p+4} + \frac{12}{7} \frac{1}{p-3} + \frac{12}{7} \frac{1}{p+3}$$

$$Z(p) = \frac{3}{7} \frac{1}{p-4} - \frac{3}{7} \frac{1}{p+4} - \frac{4}{7} \frac{1}{p-3} + \frac{4}{7} \frac{1}{p+3}$$

Rücktransformation:

$$y(t) = -\frac{17}{14} * e^{4t} - \frac{17}{14} * e^{-4t} + \frac{12}{7} * e^{3t} + \frac{12}{7} * e^{-3t}$$

$$z(t) = +\frac{3}{7} * e^{4t} - \frac{3}{7} * e^{-4t} - \frac{4}{7} * e^{3t} + \frac{4}{7} * e^{-3t}$$

$$y(t) = -\frac{17}{7} \left\{ \frac{1}{2} (e^{4t} + e^{-4t}) \right\} + \frac{24}{7} \left\{ \frac{1}{2} (e^{3t} - e^{-3t}) \right\}$$

$$z(t) = \frac{6}{7} \left\{ \frac{1}{2} (e^{4t} + e^{-4t}) \right\} - \frac{8}{7} \left\{ \frac{1}{2} (e^{3t} - e^{-3t}) \right\}$$

$$y(t) = -\frac{17}{7} \cosh(4t) + \frac{24}{7} \cosh(3t)$$

$$z(t) = \frac{6}{7} \sinh(4t) - \frac{8}{7} \sinh(3t)$$

Probe:

$$y(t) = -\frac{17}{7} \cosh(4t) + \frac{24}{7} \cosh(3t)$$

$$z(t) = \frac{6}{7} \sinh(4t) - \frac{8}{7} \sinh(3t)$$

$$y'(t) = -\frac{68}{7} \sinh(4t) + \frac{72}{7} \sinh(3t)$$

$$z'(t) = \frac{24}{7} \cosh(4t) - \frac{24}{7} \cosh(3t)$$

$$y''(t) = -\frac{272}{7} \cosh(4t) + \frac{216}{7} \cosh(3t)$$

$$z''(t) = \frac{96}{7} \sinh(4t) - \frac{72}{7} \sinh(3t)$$

$$y(t=0) = -\frac{17}{7} + \frac{24}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$z(t=0) = 0$$

$$y'(t=0) = 0$$

$$z'(t=0) = \frac{24}{7} - \frac{24}{7} = 0$$

alle A.B. OK

$$\mathbf{1. DGL \u00fcberpr\u00fcfen:} \quad 7 \cdot (y'' + 17z' + 8y) = 0$$

$$-272 \cdot \cosh(4t) + 216 \cdot \cosh(3t)$$

$$+17 \cdot 24 \cdot \cosh(4t) - 17 \cdot 24 \cdot \cosh(3t)$$

$$+8(-17) \cdot \cosh(4t) + 8 \cdot 24 \cdot \cosh(3t) = 0$$

$$-272 + 17 \cdot 24 - 8 \cdot 17 = 0$$

$$216 - 17 \cdot 24 + 8 \cdot 24 = 0 \Rightarrow$$

OK

$$\mathbf{2. DGL \u00fcberpr\u00fcfen:} \quad 7(z'' + 3y' + 18z) = 0$$

$$96 \cdot \sinh(4t) - 72 \cdot \sinh(3t)$$

$$+3 \cdot (-68) \cdot \sinh(4t) + 3 \cdot 72 \cdot \sinh(3t)$$

$$+18 \cdot 6 \cdot \sinh(4t) + 18 \cdot (-8) \cdot \sinh(3t) = 0$$

$$96 - 3 \cdot 68 + 18 \cdot 6 = 0$$

$$-72 + 3 \cdot 72 - 8 \cdot 18 = 0 \Rightarrow$$

OK

\(\Rightarrow\) alle Bedingungen erf\u00fcllt

11.10. Grenzwertsätze

Behauptung ohne Herleitung:

$$y(t=0) = \lim_{p \rightarrow \infty} [p * Y(p)]$$

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{p \rightarrow 0} [p * Y(p)]$$

Der Beweis ist etwas umfangreicher, darauf soll verzichtet werden.

Beispiel 1:

gegeben:
$$Y(p) = \frac{b_0 p + b_1}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

gesucht: ohne Transformation $y(t) = 0$ und $y(t \rightarrow \infty)$

$$y(t=0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[p * \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0} \right] = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \frac{b_0}{p}}{1 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_0}{p^2}} = b_1$$

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p * \frac{b_0 p + b_1}{p^2 + a_1 p + a_0} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{b_0 p^2 + b_1 p}{p^2 + a_1 p + a_0} = 0$$

Beispiel 2:

gegeben:
$$Y(p) = \frac{3p^2 + 6p + 8}{p(p^2 + 8p + 4)}$$

gesucht: ohne Transformation $y(t) = 0$ und $y(t \rightarrow \infty)$

$$y(t=0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{3p^2 + 6p + 8}{p(p^2 + 8p + 4)} = 3$$

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{3p^2 + 6p + 8}{p(p^2 + 8p + 4)} = \frac{8}{4} = 2$$

11.11. Die Impulsfunktion $\delta(t)$

Anderer Name: Dirac-Impuls, Diracsche Funktion

Definition:

Die Impulsfunktion $\delta(t)$ ist definiert mit folgenden Eigenschaften:

- nur bei $t = 0$ von Null verschieden
- Amplitude unendlich
- Breite infinitesimal klein
- Impulsfläche 1s

Anschaulich darstellen läßt sich der Impuls entweder durch ein Rechteck oder durch eine e-Funktion der Fläche 1s.

Beschreibung des Impulses mit Hilfe von e-Funktionen

$$y_1(t) = e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \int_{t=0}^{\infty} e^{-t/\tau} dt = \tau * e^{-t/\tau} \Big|_{t=0}^{\infty} = -\tau [e^{-\infty} - e^0] = \tau$$

$$y(t) = \frac{1s}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{1s}{\tau} \int_{t=0}^{\infty} e^{-t/\tau} d\tau = 1s$$

Bild MA1111A verdeutlicht den Einfluß von kleineren τ . Bei kleiner werdenden τ steigt die Amplitude und die Impulsform wird deutlicher.

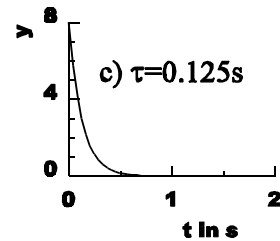
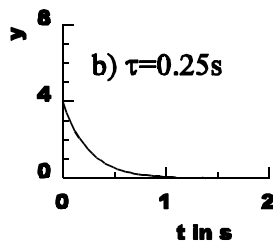
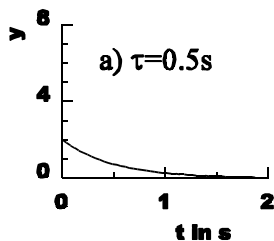


Bild MA1111A: $y(t) = \frac{1s}{\tau} e^{-t/\tau}$

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1s}{\tau} e^{-t/\tau} \right\} \quad (A)$$

Laplace-Transformieren von $\delta(t)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}\left\{ \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{1s}{\tau} e^{-t/\tau} \right] \right\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1s}{\tau} \mathcal{L}\left[e^{-t/\tau} \right] \right\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{1s}{\tau} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[1s \frac{1}{\tau * p + 1} \right] = 1s$$

$\delta(t)$ ○-----● 1 s

Beschreibung des Impulses mit Hilfe von Rechtecken

Bild MA1111B zeigt Rechtecke mit der Fläche 1 s.

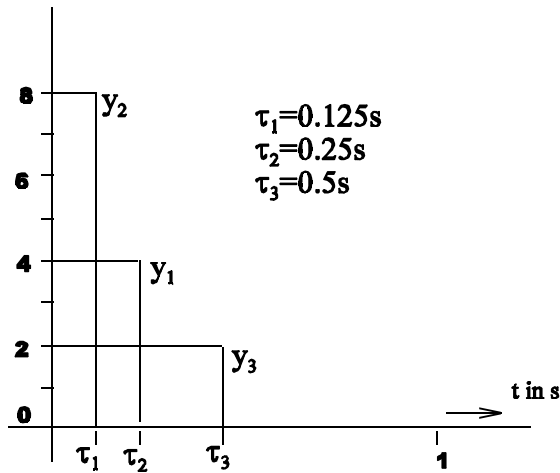


Bild MA1111B

$$y(t) = \frac{1 s}{\tau} * \{s(0) - s(\tau)\}$$

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \{y(t)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 s}{\tau} [s(0) - s(\tau)] \right\}$$

(A)

Laplace-Transformieren von $\delta(t)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}\left\{ \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1 s}{\tau} [s(0) - s(\tau)] \right) \right\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 s}{\tau} \mathcal{L} [s(0) - s(\tau)] \right\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 s}{\tau} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right) \right\}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 s}{\tau p} \left[1 - \left(1 - \frac{p\tau}{1!} + \frac{(p\tau)^2}{2!} - \frac{(p\tau)^3}{3!} + \dots \right) \right] \right\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{1 s}{\tau p} * \left(\frac{p\tau}{1} - \frac{(p\tau)^2}{2} + \frac{(p\tau)^3}{6} + \dots \right) \right]$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[1 s * \left(1 - \frac{p\tau}{2} + \frac{(p\tau)^2}{6} + \dots \right) \right] = 1 s$$

$$\delta(t) \quad \circ \text{-----} \bullet \quad 1 s$$

Praktische Anwendung der Impulsfunktion:

- Einschalten einer idealen Spannungsquelle an C
- Kraftstoß in der Mechanik
- Impulsantwort in der Regelungstechnik

Anhang

Aufgaben

Aufgabe 9.1.1

Einige der auf den Arbeitsblättern MAIII-2 bis MAIII-12 dargestellten periodischen Funktionsverläufe sollen mit Hilfe einer Fourier-Reihe angepaßt werden.

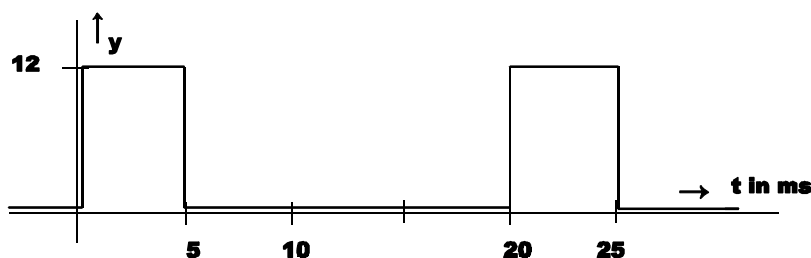
- reelle Fourier-Reihe
- komplexe Fourier-Reihe
- einen Koeffizienten exemplarisch mit Hilfe der numerischen Fourier-Analyse

Aufgabe 9.1.2

Die auf Arbeitsblatt MAIII-4 dargestellten Funktionen weisen eine Periodendauer von $T = 60 \mu\text{s}$ und eine Impulsdauer von $T_1 = 10 \mu\text{s}$ auf. Geben Sie die Fourier-Reihe in t an. Verwenden Sie die auf Arbeitsblatt MAIII-4 gegebenen Informationen.

Aufgabe 9.1.3

Für den dargestellten Verlauf $y(t)$ sind die Fourier-Koeffizienten a_k , b_k und a_0 zu berechnen.



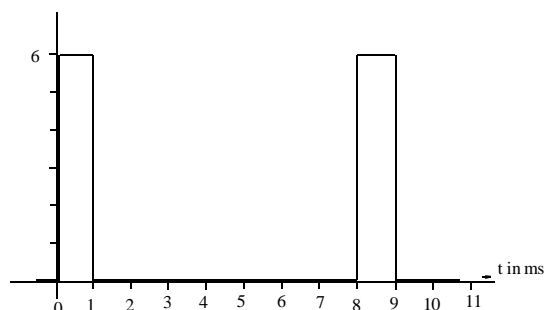
$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

Geben Sie die Reihe bis $k = 7$ und ω_0 an.

Hinweis: Die Reihe mit Hilfe des dargestellten Koordinatensystems zu berechnen, ist sehr aufwendig. Die Wahl eines anderen Koordinatensystems ist ratsam.

Aufgabe 9.1.4

Für den dargestellten Verlauf $y(t)$ sind die Fourier-Koeffizienten a_k , b_k und a_0 zu berechnen.



- a) Bestimmen Sie a_k , b_k und a_0 allgemein für:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

- b) Geben Sie die Reihe bis $k = 7$ und ω_0 an.

Hinweis: Die Reihe mit Hilfe des dargestellten Koordinatensystems zu berechnen, ist sehr aufwendig.

Die Wahl eines anderen Koordinatensystems ist ratsam.

Aufgabe 9.2.1

Der Zeitverlauf

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 & t > -t_1 \text{ und } t > t_1 \\ y(t) &= h(1 + t/t_1) & -t_1 \leq t \leq 0 \\ y(t) &= h(1 - t/t_1) & 0 \leq t \leq t_1 \end{aligned}$$

soll auf seine Frequenzanteile untersucht werden. Bestimmen Sie das Fourier-Integral $y(\omega)$

Aufgabe 9.2.2

Der Zeitverlauf

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 & t > 0 \text{ und } t > t_1 \\ y(t) &= -1 - (t/t_1)^2 & 0 \leq t \leq t_1 \end{aligned}$$

soll auf seine Frequenzanteile untersucht werden. Bestimmen Sie das Fourier-Integral $y(\omega)$

Aufgabe 10.2.1

Man klassifiziere die folgenden DGLn nach:

- Ordnung,
 - linear/nichtlinear
- und bei linearen DGLn zusätzlich nach:
- homogen/nicht homogen
 - konstanten/nicht konstanten Koeffizienten.

a)	$y'' + yx' = 4x$	b)	$y''' + x*y'' + x^3*y' + y = 6x^5$
c)	$y' + \sqrt{y''} + 3x = 0$	d)	$y'' + y' + y = \sin(x)$
e)	$\frac{y''}{y'} + y = 0$	f)	$y''' + y' + y = 0$

Aufgabe 10.2.2

Man klassifiziere die folgenden DGLn nach:

- Ordnung,
 - linear/nichtlinear
- und bei linearen DGLn zusätzlich nach:
- homogen/nicht homogen
 - konstanten/nicht konstanten Koeffizienten.

a)	$2y^2 + y' = 3x$	b)	$y*x + y' - 3x = 0$
c)	$y*y'' + y' = 0$	d)	$y*x^2 + \sqrt{x}*y' + x^2*y'' = 0$
e)	$\frac{y}{x} + y'''*x + y'*x^3 - \cos(x) = 0$		

Aufgabe 10.2.3

Bilden Sie von den folgenden linearen, inhomogen DGLn die homogene DGL.

a)	$y + y'' = \sin(x)$	b)	$y + \frac{y'}{x} - x^2 = 0$
c)	$y' + 3y + 4x^2 = \cos(x) + y''$	d)	$x^2*y' + xy'' + x^2 + x*y = e^x$

Aufgabe 10.3.1 (Zusatzaufgabe)

Von den folgenden DGLn 1. Ordnung soll die Lösung grafisch ermittelt werden. Die Steigung $y' = f(x,y)$ soll in das Kennlinienfeld der x-y-Ebene für verschiedene Punkte (x,y) eingezeichnet werden. Aus den Steigungen ist die Kurvenschar zu skizzieren. (Analytische Lösung ist in Aufgabe 10.4.1 gegeben)

a)	$y' - x*y = 0$	b)	$y' = x/y$
c)	$y' + y = 1$	d)	$y' + x*y^2 = 0$
e)	$y' - x^2*y = 0$	f)	$y' + e^{-x}*x*y^2 = 0$

Aufgabe 10.3.2

Bilden Sie die DGL der folgenden Kurvenscharen.

a) $y = c_1 \sqrt{x - c_2}$

b) $y = c_1 * \frac{1}{x^2 + c_2}$

Aufgabe 10.4.1

Die folgenden Lösungen sind durch Probe vollständig zu überprüfen.

	DGL	Anfangsbedingungen	Lösung
a)	$y' - x*y = 0$	$y_0 = y(x=0) = 5$	$y = 5 * e^{\frac{1}{2}x^2}$
b)	$y' = x/y$	$y_0 = y(x=0) = 2$	$y = \sqrt{x^2 + 4}$
c)	$y' + y = 1$	$y_0 = y(x=0) = 3$	$y = 2 * e^{-x} + 1$
d)	$y' + x*y^2 = 0$	$y_0 = y(x=0) = 0.5$	$y = \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + 2}$
e)	$y' - x^2*y = 0$	$y_0 = y(x=0) = 7$	$y = 7 * e^{\frac{1}{3}x^3}$
f)	$y' + e^{-x}*x*y^2 = 0$	$y_0 = y(x=0) = 2$	$y = \frac{1}{3 - e^{-x}(1+x)}$
g)	$y' + 5y = -10$	$y_0 = y(x=0) = 2$	$y = 4 * e^{-5x} - 2$
h)	$y' + 6x = 18$	$y_0 = y(x=0) = 2$	$y = 3 - e^{-6x}$
i)	$y'' + 7y' + 10y = 40$	$y_0 = y(x=0) = 17$ $y_0' = y'(x=0) = 9$	$y = 4 + 8 * e^{-2x} - 5 * e^{-5x}$
j)	$y'' + 7y' + 12y = 60$	$y_0 = y(x=0) = 11$ $y_0' = y'(x=0) = -10$	$y = 6 + 10 * e^{-3x} - 5 * e^{-4x}$
k)	$y'' + 4y = 36$	$y_0 = y(x=0) = 12$ $y_0' = y'(x=0) = 4$	$y = 9 + 3 * \cos(2x) + 2 * \sin(2x)$
l)	$y'' + 9y = 54$	$y_0 = y(x=0) = 8$ $y_0' = y'(x=0) = 6$	$y = 6 + 2 * \cos(3x) + 2 * \sin(3x)$

Aufgabe 10.4.2

Ermitteln Sie durch Einsetzen der Lösung in die lineare homogene DGL den Werte a.

a) $y' + 4y = 0$

$y = c_1 * e^{+ax}$

b) $y' + 3y = 0$

$y = c_1 * e^{+ax}$

c) $3y' + 18y = 0$

$y = c_1 * e^{+ax}$

Aufgabe 10.4.3 (Zusatzaufgabe für Tüftler)

Ermitteln Sie durch Einsetzen der Lösung in die lineare homogene DGL den Werte a.

$y'' + 8y' + 15y = 0$

$y = c_1 * e^{+ax} + c_2 * e^{+ax}$

Aufgabe 10.5.1

Die folgenden DGLn sind mit Hilfe der "Trennung der Variablen" zu lösen.

a) $y' - x*y = 0$ $y_0 = y(x=0) = 5$

b) $y' = x/y$ $y_0 = y(x=0) = 2$

c) $y' + y = 1$ $y_0 = y(x=0) = 3$

d) $y' + x*y^2 = 0$ $y_0 = y(x=0) = 0.5$

e) $y' - x^2*y = 0$ $y_0 = y(x=0) = 7$

f) $y' + e^{-x}*x*y^2 = 0$ $y_0 = y(x=0) = 2$

Aufgabe 10.5.2

Lösen Sie mit Hilfe der Variablentrennung. Führen Sie die vollständige Probe durch!

- | | | |
|----|---------------------------|----------------------|
| a) | $y' \cdot x - y(x-1) = 0$ | $y(2) = 3 \cdot e^2$ |
| b) | $y' - y(x^2+1) = 0$ | $y(0) = 5$ |
| c) | $y'(1+x^2) - y = 0$ | $y(0) = 8$ |
| d) | $y' \cdot x = y \cdot 5$ | $y(2) = 96$ |

Aufgabe 10.5.3

Die folgende DGLn sind mit Hilfe der Substitution zu lösen. Führen Sie die Probe aus.

- | | | | | |
|----|--------------------------|----|--------------------------|-------------|
| a) | $3y' = 6x + 4y + 5$ | b) | $4y' + 8x - 12y = 20$ | |
| c) | $3y' + 9x = 12y - 18$ | d) | $3y' = (5y - 2x + 3)^2$ | (aufwendig) |
| e) | $y' = \frac{5x + 4y}{x}$ | f) | $y' = \frac{3x - 7y}{x}$ | |
| g) | $4y' \cdot x = 6x + 7y$ | | | |

Aufgabe 10.5.4

Die folgenden linearen DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind mit Hilfe der Variation der Konstanten zu lösen.

- | | | |
|----|------------------------------------|------------|
| a) | $2y' + 10y = 40$ | $y(0) = 2$ |
| b) | $3y' + 15y = 180e^{-3x} + 270$ | $y(0) = 2$ |
| c) | $3y' + 15y = 27x \cdot e^{-5x}$ | $y(0) = 2$ |
| d) | $y' + 3y = 20 + 10 \cdot \cos(4x)$ | $y(0) = 2$ |
| e) | $y' + 6y = 30 + 60 \cdot \sin(2x)$ | $y(0) = 2$ |

Aufgabe 10.5.5

Die folgenden linearen DGLn 1. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten sind mit Hilfe der Variation der Konstanten zu lösen.

- | | | |
|----|----------------------------------|------------------------|
| a) | $xy' + 2y = \sin(x)$ | $y(1) = 0$ |
| b) | $(x + 5)y' + y = x + 2$ | $y(1) = 0$ |
| c) | $xy' + 3y = \frac{\sin(x)}{x^2}$ | $y(1) = 0$ |
| d) | $(x + 7)y' - y = x^2 + 9x$ | $y(1) = 0$ (aufwendig) |

Aufgabe 10.5.6

Die folgenden DGLn sollen mit Hilfe des totalen Differentials untersucht werden. Es ist festzustellen, ob diese Methode die Lösung der DGL ermöglicht. Wenn ja ist die Lösung der DGL zu berechnen. Wenn möglich ist die Lösung in der Form $y = y(x)$ anzugeben. Führen Sie die Probe aus!

- | | | | |
|----|---|----|--|
| a) | $2xy + 3 + y'x^2 = 0$ | b) | $3x^2 + y + y'(2x + 3y) = 0$ |
| c) | $2xy + y^3 + y'(3y^2x + x^2) = 0$ | d) | $4xy + 2x + y'(4x + 3y) = 0$ |
| e) | $3x^2 + 6xy^2 + y'(6y^2 + 6x^2y) = 0$ | f) | $2x^2y^3 + 4y + y'(3y^2x + 2x^2y^2) = 0$ |
| g) | $6x^2y^4 + 15x^4y^6 + y'(18x^5y^5 + 8x^3y^3) = 0$ | | |

Aufgabe 10.5.7

Die folgende DGLn sollen mit Hilfe des integrierenden Faktors gelöst werden. Als Hinweis wird die Art des integrierenden Faktors angegeben. Führen Sie die Probe aus!

- | | | |
|----|---|------------------------|
| a) | $(y^2x^3 - 2y) + (x + x^4)y' = 0$ | $\mu = \mu(x)$ |
| b) | $y^2 \cos(x) + 6x^2y + [4y \sin(x) + 6x^3]y' = 0$ | $\mu = \mu(y)$ |
| c) | $12y^2 + 16x^4y^3 + [15yx + 12x^5y^2]y' = 0$ | $\mu = \mu(x \cdot y)$ |

Aufgabe 10.7.1

Die folgenden linearen DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind zu lösen. Der Anfangswert $y(x=0)$ ist gegeben. Führen Sie die vollständige Probe aus!

- | | | |
|----|---------------------------|---------------|
| a) | $2y' + 3y = 8$ | $y(x=0) = 10$ |
| b) | $y' + 4y = 16$ | $y(x=0) = 6$ |
| c) | $4y' + y = 3x$ | $y(x=0) = 5$ |
| d) | $y' + 2y = 3e^{-4x}$ | $y(x=0) = 2$ |
| e) | $y' + 2y = 3e^{-2x}$ | $y(x=0) = 2$ |
| f) | $y' + 3y = 8\cos(6x)$ | $y(x=0) = 4$ |
| g) | $y' + 3y = 8\cos(3x)$ | $y(x=0) = 4$ |
| h) | $y' + y = x \cdot e^{-x}$ | $y(x=0) = 2$ |

Aufgabe 10.7.2

Die folgenden linearen DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind zu lösen. Der Anfangswert von y und dessen Ableitung ist gegeben. Führen Sie die vollständige Probe aus!

- | | | | |
|-----|--|---------------|----------------|
| a1) | $y'' + 7y' + 12y = 5$ | $y(x=0) = 2$ | $y'(x=0) = 0$ |
| a2) | $y'' + 7y' + 12y = 5x$ | $y(x=0) = 2$ | $y'(x=0) = 0$ |
| a3) | $y'' + 7y' + 12y = 5 \cdot e^{-2x}$ | $y(x=0) = 2$ | $y'(x=0) = 0$ |
| a4) | $y'' + 7y' + 12y = 5 \cdot e^{-3x}$ | $y(x=0) = 2$ | $y'(x=0) = 0$ |
| a5) | $y'' + 7y' + 12y = 5\sin(3x)$ | $y(x=0) = 2$ | $y'(x=0) = 0$ |
| b1) | $y'' + 8y' + 25y = 150$ | $y(x=0) = 10$ | $y'(x=0) = 14$ |
| b2) | $y'' + 8y' + 25y = 150x$ | $y(x=0) = 10$ | $y'(x=0) = 14$ |
| b3) | $y'' + 8y' + 25y = 150 \cdot e^{-2x}$ | $y(x=0) = 10$ | $y'(x=0) = 14$ |
| b4) | $y'' + 8y' + 25y = 150 \cdot e^{-4x}$ | $y(x=0) = 10$ | $y'(x=0) = 14$ |
| b5) | $y'' + 8y' + 25y = 150 \cdot e^{-4x} \cdot \sin(3x)$ | $y(x=0) = 10$ | $y'(x=0) = 14$ |
| c1) | $y'' + 8y' + 16y = 80$ | $y(x=0) = 3$ | $y'(x=0) = 0$ |
| c2) | $y'' + 8y' + 16y = 80x$ | $y(x=0) = 3$ | $y'(x=0) = 0$ |
| c3) | $y'' + 8y' + 16y = 80 \cdot e^{-6x}$ | $y(x=0) = 3$ | $y'(x=0) = 0$ |
| c4) | $y'' + 8y' + 16y = 80 \cdot e^{-4x}$ | $y(x=0) = 3$ | $y'(x=0) = 0$ |
| c5) | $y'' + 8y' + 16y = 80x \cdot e^{-6x}$ | $y(x=0) = 3$ | $y'(x=0) = 0$ |

Aufgabe 10.7.3

Die Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung der Eigenwerte λ , der homogenen linearen DGLn sind anzugeben.

- | | | | |
|----|--|----|---------------------------------------|
| a) | $y'''' + 4y''' + 3y'' + 6y' + 8y + 6y = 0$ | b) | $y''' + 2y'' + 5y' + 3y = 0$ |
| c) | $y''' + 3y'' + 2y' + 5y = 0$ | d) | $y'''' + 6y''' + 4y'' + 8y' + 9y = 0$ |

Aufgabe 10.7.4

Eine homogene DGL 8. Ordnung hat als Lösung folgende Eigenwerte. Geben Sie den Ansatz für die homogene Lösung an.

- | | | |
|----|--|--|
| a) | $\lambda_1 = -2$ $\lambda_{2345} = -4 \pm 3j$ | $\lambda_{678} = -5$ |
| b) | $\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = -3$ $\lambda_{34} = -5 \pm 3j$ | $\lambda_{56} = -4 \pm 3j$ $\lambda_{78} = -8$ |
| c) | $\lambda_{12} = -2$ $\lambda_{345678} = -4 \pm 3j$ | |
| d) | $\lambda_1 = -3$ $\lambda_{23} = -4 \pm j5$ | $\lambda_4 = -6$ $\lambda_{5678} = -8$ |

Aufgabe 10.7.5 (aufwendig)

Die folgende DGL mit Anfangswerten soll gelöst werden.

$$y''' + 11y'' + 38y' + 40y = 800 + 2210 \cdot \cos(3x)$$

$$y(x=0) = 0 \quad y'(x=0) = 0 \quad y''(x=0) = 0$$

- Geben Sie das charakteristische Polynom in λ an.
- Berechnen Sie einen Eigenwert λ_1 iterativ.
- Berechnen Sie die Eigenwerte λ_2 und λ_3 durch Polynomdivision und Lösen einer quadratischen Gleichung
- Stellen Sie einen Ansatz für die homogene Lösung auf.
- Geben Sie für jede Anregung den Ansatz für die spezielle Lösung an.
- Bestimmen die spezielle Lösung.
- Geben Sie die Gesamtlösung (noch mit Konstanten) an.
- Bestimmen Sie die noch frei wählbaren Konstanten.
- Geben Sie die Gesamtlösung an.
- Führen Sie die vollständige Probe durch.

Aufgabe 10.7.6 (aufwendig)

Die folgende DGL mit Anfangswerten soll gelöst werden.

$$y''' + 9y'' + 24y' + 20y = 20 + 10e^{-2x} + 30e^{-4x}$$

$$y(x=0) = 0 \quad y'(x=0) = 0 \quad y''(x=0) = 0$$

- Geben Sie das charakteristische Polynom in λ an.
- Berechnen Sie einen Eigenwert λ_1 iterativ.
- Berechnen Sie die Eigenwerte λ_2 und λ_3 durch Polynomdivision und Lösen einer quadratischen Gleichung
- Stellen Sie einen Ansatz für die homogene Lösung auf.
- Geben Sie für jede Anregung den Ansatz für die spezielle Lösung an.
- Bestimmen die spezielle Lösung.
- Geben Sie die Gesamtlösung (noch mit Konstanten) an.
- Bestimmen Sie die noch frei wählbaren Konstanten.
- Geben Sie die Gesamtlösung an.
- Führen Sie die vollständige Probe durch.

Aufgabe 10.7.7 (aufwendig)

Die folgende DGL mit Anfangswerten soll gelöst werden.

$$y''' + 8y'' + 37y' + 50y = 200 + 522 \cdot \sin(5x)$$

$$y(x=0) = 0 \quad y'(x=0) = 0 \quad y''(x=0) = 0$$

- Geben Sie das charakteristische Polynom in λ an.
- Berechnen Sie einen Eigenwert λ_1 iterativ.
- Berechnen Sie die Eigenwerte λ_2 und λ_3 durch Polynomdivision und Lösen einer quadratischen Gleichung
- Stellen Sie einen Ansatz für die homogene Lösung auf.
- Geben Sie für jede Anregung den Ansatz für die spezielle Lösung an.
- Bestimmen die spezielle Lösung.
- Geben Sie die Gesamtlösung (noch mit Konstanten) an.
- Bestimmen Sie die noch frei wählbaren Konstanten.
- Geben Sie die Gesamtlösung an.
- Führen Sie die vollständige Probe durch.

Aufgabe 10.7.8

Die folgende DGL soll gelöst werden.

$$y^{8t} + 19y^{7t} + 168y^{6t} + 878y^{5t} + 2821y^{4t} + 5531y^{3t} + 6378y^{2t} + 3940y^t + 1000y = 800 + 50\cos(x) + 10e^{-x} + 60\sin(2x)$$

- Geben Sie das charakteristische Polynom in λ an.
- Berechnen Sie alle Eigenwerte λ_i .
- Stellen Sie einen Ansatz für die homogene Lösung auf.
- Geben Sie für jede Anregung den Ansatz für die spezielle Lösung an.

Aufgabe 10.8.1

Die folgenden linearen DGLn n-ter Ordnung sollen in ein System von n DGLn 1. Ordnung überführt werden. Geben Sie dieses an. Gesucht ist auch die Matrixschreibweise des DGL-Systems.

- a) $y'''' + 6y''' + 8y'' + 7y' + 20y = 100$ b) $y'''' + 9y''' + 7y'' + 20y' + 80y = 200$
 c) $y''' + 8y'' + 9y' + 8y = 20 \cdot \sin(4x)$ d) $y'' + 8y + 16 = 20 \cdot e^{-4x}$
 e) $y'''' + 6y''' + 8y'' + 9y' + 8y + 20y = 80$

Aufgabe 10.8.2

Die folgenden nichtlinearen DGLn n-ter Ordnung sind in ein System von n DGLn 1. Ordnung zu überführen.

- a) $y''' + 18y''y' + 13y^2 = 18 \cdot \cos(x)$ b) $y^{1/2} + 2y^2 \cdot y^{1/3} + 18y \cdot x = 20 \cdot \sin(x) \cdot x$
 c) $y''' \cdot y' + 8y'' \cdot y + y^2 + y' = 30x + 90$ d) $y'''' + 3y''' \cdot y' + 8y^2 \cdot y'' + y^4 = 20x + 30$

Aufgabe 10.8.3

Die folgenden DGL-Systeme 1. Ordnung ergeben sich aus Maschen- und Knotenregeln bei verschiedenen R-L-C-Schaltungen für die Variable i_C (y_1) und u_C (y_2). Die DGL Systeme erster Ordnung sind umzuformen in eine DGL 2. Ordnung für y_1 und in einer zweiten Teilaufgabe für y_2 .

- a) $y_2 + a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2' = f(x)$ $y_2 = a_3 \cdot y_1'$
 b) $a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_1' + y_2 = f(x)$ $a_3 \cdot y_2' = y_1$
 c) $a_1 \cdot y_1' + y_2 = f(x)$ $y_1 = a_2 \cdot y_2 + a_3 \cdot y_2'$
 d) $y_2 + a_1 \cdot y_1' = f(x)$ $a_2 \cdot y_2' = y_1 + a_3 \cdot y_1'$

Aufgabe 10.8.4

Die folgenden DGL-Systeme 1. Ordnung sollen umgeformt werden zu einer DGL n-ter Ordnung in y_i .

- a) $y_1 + a_1 \cdot y_2' + a_2 \cdot y_3' = f(x)$ (Auflösen nach y_1)
 $y_3 = a_4 \cdot y_1'$
 $y_3 = y_2 + a_3 \cdot y_2'$
 b) $a_1 \cdot y_1' + y_2 + y_3 = f(x)$ (Auflösen nach y_2)
 $y_1 = a_2 \cdot y_2' + a_3 \cdot y_2$
 $y_2 = a_4 \cdot y_3'$
 c) $y_3 + y_4 + a_1 \cdot y_1' = f(x)$ (Auflösen nach y_1)
 $y_1 = a_2 \cdot y_3'$
 $y_4 = a_3 \cdot y_2'$
 $y_1 = y_2 + a_4 \cdot y_4'$

!!! Achtung !!! Bei den Aufgaben 10.9.1 bis 10.9.5 treten im Vergleich zur exakten Lösung kleine oder auch etwas größere Abweichungen auf. Diese sind durch die relativ großen Schrittweiten bedingt. Die Abweichungen werden bei Wahl kleinerer Schrittweiten geringer.

Aufgabe 10.9.1

Für einige der linearen DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus Aufgabe 10.7.1 sind die Lösungswerte mit Hilfe des Streckenzug Verfahrens (Rechteckregel) für $y(x = 0.5)$ zu bestimmen. Die Schrittweite soll $h = 0.1$ betragen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem analytischen Ergebnis aus Aufgabe 10.7.1.

Aufgabe 10.9.2

Für einige der linearen DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus Aufgabe 10.7.1 sind die Lösungswerte mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung für $y(x = 0.5)$ zu bestimmen. Die Schrittweite soll $h = 0.5$ betragen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem analytischen Ergebnis aus Aufgabe 10.7.1 und dem numerischen aus Aufgabe 10.9.1.

Aufgabe 10.9.3

Einige der linearen DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus Aufgabe 10.7.2 sind numerisch zu lösen mit Hilfe des Streckenzug Verfahrens (Rechteckregel). Der Wert $y(x=0.2)$ soll mit der Schrittweite $h = 0.05$ bestimmt werden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem analytischen Ergebnis aus Aufgabe 10.7.2.

Aufgabe 10.9.4

Einige der linearen DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus Aufgabe 10.7.2 sind numerisch zu lösen mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung. Der Wert $y(x=0.2)$ soll mit der Schrittweite $h = 0.1$ bestimmt werden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem analytischen Ergebnis aus Aufgabe 10.7.2 und dem numerischen aus Aufgabe 10.9.3.

Aufgabe 10.9.5

Einige der linearen DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus den Aufgaben 10.7.5 bis 10.7.7 sind numerisch zu lösen mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung. Der Wert $y(x=0.2)$ soll mit der Schrittweite $h = 0.2$ bestimmt werden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem analytischen Ergebnis aus den Aufgaben 10.7.5 bis 10.7.7.

Aufgabe 10.10.1

Die folgenden DGLn mit Anfangsbedingungen sind mit Hilfe eines Potenzreihen-Ansatzes zu lösen. Vergleichen Sie, wenn möglich, die gefundene Reihe mit der analytischen Lösung. Berechnen Sie a_0 bis a_4 .

- | | | | |
|----|--|---------------|---------------|
| a) | $y' + y = 1$ | $y(x=0) = 0$ | |
| b) | $y' + 2y = \cos(x)$ | $y(x=0) = 2$ | |
| c) | $y' + y = e^{-x}$ | $y(x=0) = 0$ | |
| d) | $y'' + y = 24$ | $y(x=0) = 12$ | $y'(x=0) = 0$ |
| e) | $y'' + 2y' + y = 1$ | $y(x=0) = 0$ | $y'(x=0) = 0$ |
| f) | $y' + y \cdot x = 1$ | $y(x=0) = 0$ | |
| g) | $y' + y \cdot x^2 = 4$ | $y(x=0) = 2$ | |
| h) | $y'' + \frac{3}{x} \cdot y' + x^2 \cdot y = 4$ | $y(x=0) = 2$ | |
| i) | $y'' + 4x \cdot y' + y = 4$ | $y(x=0) = 2$ | $y'(x=0) = 0$ |

Aufgabe 10.11.1

Für die folgenden nichtlinearen DGLn ist die Linearisierung durchzuführen. Der Wert y_0 ist zu bestimmen. An der Stelle y_0 soll linearisiert werden. ($y_0 > 0$).

- | | | | |
|----|---------------------------------|----|--------------------------------|
| a) | $y'' + 3y' + y^2 + 6y - 27 = 0$ | b) | $y'' + 8y' + y^2 + 8y - 9 = 0$ |
| c) | $y' + 4y^2 + 40y - 156 = 0$ | | |

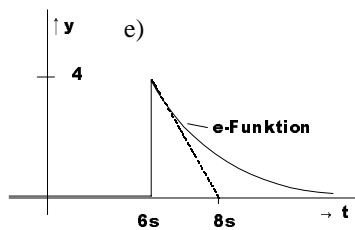
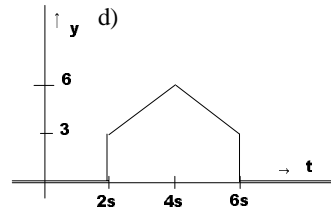
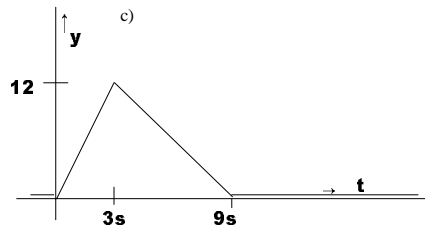
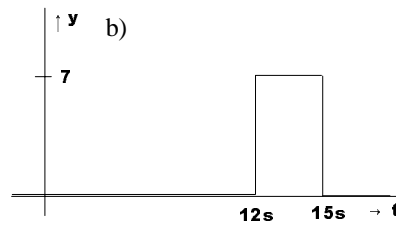
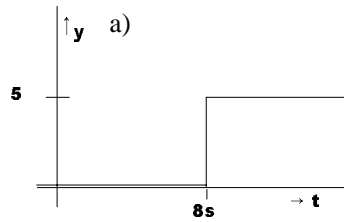
Aufgabe 10.12.1

Die folgenden homogenen DGLn mit konstanten Koeffizienten sollen mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums auf Stabilität untersucht werden.

- | | | | |
|----|------------------------------|----|---|
| a) | $y''' + 6y'' + 8y' + 6y = 0$ | b) | $y''' + 6y' - 9y + 6y = 0$ |
| c) | $-y'' - 8y' - 6y = 0$ | | |
| d) | $y'' - 8y' + 6y = 0$ | e) | $y'''' + 12y''' + 49y'' + 78y' + 40y = 0$ |

Aufgabe 11.3.1

Geben Sie die Zeitfunktion $y(t)$ mit Hilfe von Sprung-, Rampenfunktion und Verschiebeoperation an.

**Aufgabe 11.3.2**

Bilden Sie das Faltungsintegral

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t y_1(\tau) y_2(t-\tau) d\tau$$

der Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$.

- | | | | | | |
|----|-----------------------------|--------------------|----|-----------------------------|--------------|
| a) | $y_1(t) = \sin(\omega_1 t)$ | $y_2(t) = t$ | b) | $y_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ | $y_2(t) = t$ |
| c) | $y_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ | $y_2(t) = e^{-at}$ | d) | $y_1(t) = t^2$ | $y_2(t) = t$ |

Aufgabe 11.4.1

Transformieren Sie die Funktion $y(t)$ mit Hilfe der Integralformel in den Bildbereich.

- | | | | |
|----|-------------------------------------|----|-------------------------------------|
| a) | $y(t) = \sinh(at)$ | b) | $y(t) = \cosh(at)$ |
| c) | $y(t) = t * e^{-at}$ | d) | $y(t) = e^{-at} * \cos(\omega_1 t)$ |
| e) | $y(t) = e^{-at} * \sin(\omega_1 t)$ | | |

Aufgabe 11.6.1

Bilden Sie mit Hilfe von Tabelle 1 und Rechenregeln die Laplace-Transformierte der Funktion $y(t)$.

- | | | | |
|----|---------------------------|----|---|
| a) | $y(t) = 6 - 4t$ | b) | $y(t) = 10 * \cos(4t) - 6 * \sin(4t) + 8$ |
| c) | $y(t) = 50 * e^{-8t} + 9$ | d) | $y(t) = 8 * e^{-2t} + 6 * \cos(9t)$ |
| e) | $y(t) = 4t^4 + 20t^2$ | | |

Aufgabe 11.6.2

Transformieren Sie die Bildfunktion $Y(p)$ mit Hilfe von Tabelle 1 in den Zeitbereich zurück.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & Y(p) = \frac{5}{p^2} + \frac{7}{p} \\ \text{b)} & Y(p) = \frac{8p}{p^2 + 144} + \frac{1}{2p} \\ \text{c)} & Y(p) = \frac{16}{p^2 + 16} - \frac{4}{p} + \frac{3}{p^2} \\ \text{d)} & Y(p) = \frac{10}{p + 5} - \frac{8}{p + 4} + \frac{6}{p} \\ \text{e)} & Y(p) = 360 \frac{1}{p^6} + 144 \frac{1}{p^4} \end{array}$$

Aufgabe 11.6.3

Die Laplace-Transformierte von $y(t) = e^{-t}$ ist gegeben mit

$$Y(p) = \frac{1}{p + 1}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Ähnlichkeitsatzes die Laplace-Transformierte von $y_1(t) = e^{-at}$.

$$Y_1(p) = \mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

Aufgabe 11.6.4

Die Zeitverläufe aus Aufgabe 11.3.1 sind Laplace zu transformieren. Benutzen Sie dazu die Ergebnisse $y(t)$ aus Aufgabe 11.3.1 und den Verschiebungssatz der Laplace-Transformation.

Aufgabe 11.6.5

Bestimmen Sie mit Hilfe des Dämpfungssatzes der Laplace-Transformation und mit Hilfe von Tabelle 1 die Zeitfunktionen der folgenden Funktionen im Bildbereich.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & Y(p) = \frac{8}{(p + 5)^3} \\ \text{b)} & Y(p) = \frac{20}{(p + 2)^2 + 4^2} \\ \text{c)} & Y(p) = \frac{p}{p^2 + 10p + 61} \\ \text{d)} & Y(p) = \frac{1}{(p + 6)^2} \\ \text{e)} & Y(p) = \frac{10}{p^2 + 6p + 25} \\ \text{f)} & Y(p) = \frac{8p}{p^2 + 6p + 25} \end{array}$$

Aufgabe 11.6.6

Berechnen Sie mit Hilfe des Faltungssatzes und Tabelle 1 die Zeitfunktionen der folgenden Bildfunktionen.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & Y(p) = \frac{1}{p} * \frac{1}{p + a} \\ \text{b)} & Y(p) = \frac{1}{p} * \frac{1}{p^2 + \omega_1^2} \\ \text{c)} & Y(p) = \frac{1}{p^2} * \frac{1}{p + a} \\ \text{d)} & Y(p) = \frac{\omega_1}{(p^2 + \omega_1^2)(p + a)} \end{array}$$

Aufgabe 11.7.1

Transformieren Sie in den Bildbereich.

$$\begin{array}{llll} f(t) = y' & y(t=0) = 5 & & \\ f(t) = y'' & y(t=0) = 5 & y'(t=0) = 8 & \\ f(t) = y''' & & y(t=0) = 8 & y'(t=0) = 6 & y''(t=0) = 9 \\ f(t) = y'''' & y(t=0) = 2 & y'(t=0) = 3 & y''(t=0) = 4 & y'''(t=0) = 6 \end{array}$$

Aufgabe 11.8.1

Transformieren Sie die DGLn mit Anfangsbedingungen in den Bildbereich und lösen Sie nach $Y(p)$ auf.

- | | | | | | |
|----|---------------------------------------|------------|-------------|-------------|--------------|
| a) | $y'' + 8y' + 6y = \sin(5t)$ | $y_0 = 4$ | $y_0' = 6$ | | |
| b) | $y'' + 4y' + 5y = e^{-5t}$ | $y_0 = 3$ | $y_0' = 8$ | | |
| c) | $y'' + 10y' + 50y = 8$ | $y_0 = 2$ | $y_0' = 5$ | | |
| d) | $y'' + 25y = \cos(3t)$ | $y_0 = 7$ | $y_0' = 9$ | | |
| e) | $y''' + 4y'' + 8y' + 13y = e^{-5t}$ | $y_0 = 5$ | $y_0' = -3$ | $y_0'' = 2$ | |
| f) | $y'''' + 3y''' + y = e^{-2t}\cos(4t)$ | $y_0 = -1$ | $y_0' = 1$ | $y_0'' = 2$ | $y_0''' = 3$ |

Aufgabe 11.8.2

Lösen Sie einige der linearen DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus Aufgabe 10.7.1 mit Hilfe der Laplace Transformation. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 10.7.1.

Aufgabe 11.8.3

Lösen Sie einige der linearen DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus Aufgabe 10.7.2 mit Hilfe der Laplace Transformation. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 10.7.2.

Aufgabe 11.8.4 (sehr aufwendig)

Lösen Sie die lineare DGL 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus Aufgabe 10.7.5 mit Hilfe der Laplace Transformation. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 10.7.5.

Aufgabe 11.8.5 (sehr aufwendig)

Lösen Sie die lineare DGL 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus Aufgabe 10.7.6 mit Hilfe der Laplace Transformation. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 10.7.6.

Aufgabe 11.8.6 (sehr aufwendig)

Lösen Sie die lineare DGL 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus Aufgabe 10.7.7 mit Hilfe der Laplace Transformation. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 10.7.7.

Aufgabe 11.8.7

Die linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten aus Aufgabe 10.7.3 sind Laplace zu transformieren. Zusätzliche Anfangsbedingungen:

$$y(t=0) = 1 \quad y^{(i)}(t=0) = 0 \quad \text{für } i = 1 \text{ bis } n-1$$

Stellen Sie nach $Y(p)$ um. Geben Sie das Nennerpolynom an. Vergleichen Sie das Nennerpolynom mit der Bestimmungsgleichung der λ_i aus Aufgabe 10.7.3.

Ergebnisse**Aufgabe 9.1.3**

$$a_0/2 = 3 \quad a_k = \frac{12}{\pi * k} * \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \quad b_k = \frac{12}{\pi * k} * \left[1 - \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\omega_0 = 314.2 \text{ s}^{-1}$$

$$y(t) = 3 + \frac{12}{\pi} \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega_0 t) + \dots \right. \\ \left. + \sin(\omega_0 t) + \frac{2}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \frac{2}{6} \sin(6\omega_0 t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

Aufgabe 9.1.4

$$a_0 = 1.5 \quad a_k = \frac{6}{\pi * k} * \sin(45^\circ k) \quad b_k = \frac{6}{\pi * k} * [1 - \cos(k45^\circ)]$$

$$\omega_0 = 785.4 \text{ s}^{-1}$$

$$y(t) = 0.75 + \frac{6}{\pi} \left[\frac{0.707}{1} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t) + \frac{0.707}{3} \cos(3\omega_0 t) \right. \\ \left. - \frac{0.707}{5} \cos(5\omega_0 t) - \frac{1}{6} \cos(6\omega_0 t) - \frac{0.707}{7} \cos(7\omega_0 t) \right. \\ \left. + \dots \right. \\ \left. + \frac{0.293}{1} \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1.707}{3} \sin(3\omega_0 t) \right. \\ \left. + \frac{2}{4} \sin(4\omega_0 t) + \frac{1.707}{5} \sin(5\omega_0 t) + \frac{1}{6} \sin(6\omega_0 t) + \frac{0.293}{7} \sin(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

Aufgabe 9.2.1

$$Y(\omega) = \frac{2h}{t_1 \omega^2} [1 - \cos(\omega t_1)]$$

Aufgabe 10.3.2

$$a) \quad y'' + y * y'' = 0$$

$$b) \quad 0 = -2x - \frac{y}{y'} + \frac{y * x}{y'^2} y''$$

Aufgabe 10.4.2

$$a) \quad a = -4$$

$$b) \quad a = -3$$

$$c) \quad a = -6$$

Aufgabe 10.4.3

$$a_1 = -3 \quad a_2 = -5$$

Aufgabe 10.5.1

$$a) \quad y = 5 * e^{\frac{1}{2} x^2}$$

$$b) \quad y = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$c) \quad y = 2 * e^x + 1$$

$$d) \quad y = \frac{1}{\frac{1}{2} x^2 + 2}$$

$$e) \quad y = 7 * e^{\frac{1}{3} x^3}$$

$$f) \quad y = \frac{1}{3 - e^{-x}(1+x)}$$

Aufgabe 10.5.2

$$a) \quad y = 6 * e^{-x} \frac{1}{x}$$

$$b) \quad y = 5 * \exp\left[\frac{1}{3} x^3 + x\right]$$

$$c) \quad y = 8 * \exp[\arctan(x)]$$

$$d) \quad y = 3 * x^5$$

Aufgabe 10.5.3

$$a) \quad y = \frac{1}{4} \left[c * e^{\frac{4}{3}x} - 6x - 9.5 \right] \quad c) \quad y = -\frac{5}{3}x + c * x^4 \quad d) \quad y = \frac{3}{8}x + c * x^{-7}$$

Aufgabe 10.5.4

$$a) \quad y(x) = 4 - 2 * e^{-5x} \quad b) \quad y(x) = -46 * e^{-5x} + 30 * e^{-3x} + 18$$

$$c) \quad y(x) = (2 + 4.5 * x^2) * e^{-5x} \quad d) \quad y(x) = -\frac{88}{15} * e^{-3x} + \frac{20}{3} + 1.2 * \cos(4x) + 1.6 * \sin(4x)$$

$$e) \quad y(x) = 5 + 9 * \sin(2x) - 3 * \cos(2x)$$

Aufgabe 10.5.5

$$a) \quad y(x) = \frac{\cos(1) - \sin(1)}{x^2} + \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x} \quad b) \quad y(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$$

$$c) \quad y(x) = \frac{-\cos(x) + \cos(1)}{x^3}$$

Aufgabe 10.5.6

$$a) \quad y = -\frac{3}{x} + \frac{c}{x^2} \quad b) \quad \text{Methode nicht anwendbar}$$

$$c) \quad F = x^2 * y + y^3 * x = c \quad d) \quad \text{Methode nicht anwendbar}$$

$$e) \quad x^3 + 3x^2 * y^2 + 2y^3 = c \quad f) \quad \text{Methode nicht anwendbar}$$

$$g) \quad 2x^3 * y^4 + 3x^5 * y^6 = c$$

Aufgabe 10.5.7

$$a) \quad \mu = x^{-3} \quad y * x + y * x^{-2} = c$$

$$b) \quad \mu = y^2 \quad y^4 * \sin(x) + 2x^3 * y^3 = c$$

$$c) \quad \mu = (y * x)^3 \quad 3y^5 * x^4 + 2x^8 * y^6 = c$$

Aufgabe 10.7.1

$$a) \quad y = \frac{8}{3} + \frac{22}{3} * e^{-1.5x} \quad b) \quad y = 4 + 2e^{-4x}$$

$$c) \quad y = 17 * e^{-0.25x} + 3x - 12 \quad d) \quad y = \frac{7}{2} * e^{-2x} - \frac{3}{2} * e^{-4x}$$

$$e) \quad y = (2 + 3x) * e^{-2x} \quad f) \quad y = \frac{52}{15} * e^{-3x} + \frac{8}{15} * \cos(6x) + \frac{16}{15} * \sin(6x)$$

$$g) \quad y = \frac{8}{3} * e^{-3x} + \frac{4}{3} * \cos(3x) + \frac{4}{3} * \sin(3x) \quad h) \quad y = \left(2 + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{-x}$$

Aufgabe 10.7.2

$$a1) \quad y = \frac{5}{12} + \frac{19}{3} * e^{-3x} - \frac{19}{4} * e^{-4x} \quad a2) \quad y = \frac{77}{9} * e^{-3x} - \frac{101}{16} * e^{-4x} + \frac{5}{12}x - \frac{35}{144}$$

$$a3) \quad y = 3 * e^{-3x} - 3.5 * e^{-4x} + 2.5 * e^{-2x} \quad a4) \quad y = -e^{-4x} + 3 * e^{-3x} + 5x * e^{-3x}$$

$$a5) \quad y = \frac{1}{30} \sin(3x) - \frac{7}{30} \cos(3x) - \frac{33}{5} e^{-4x} + \frac{53}{6} e^{-3x}$$

$$b1) \quad y = 6 + e^{-4x} [4 \cos(3x) + 10 \sin(3x)]$$

$$b2) \quad y = 6x - 1.92 + e^{-4x} [11.92 * \cos(3x) + 18.56 * \sin(3x)]$$

$$b3) \quad y = \frac{1}{13} * \{ 150 * e^{-2x} + e^{-4x} [-20 * \cos(3x) + 134 * \sin(3x)] \}$$

$$b4) \quad y = e^{-4x} \left[18 * \sin(3x) - \frac{20}{3} \cos(3x) + \frac{50}{3} \right]$$

$$b5) \quad y = e^{-4x} \left[\frac{50}{3} + 18.0192 * \sin(3x) - 6.6378 * \cos(3x) \right] + \frac{1}{52} * \sin(3x) - \frac{3}{104} * \cos(3x)$$

$$c1) \quad y = 5 + e^{-4x} [-2 - 8x] \quad c2) \quad y = e^{-4x} \left[\frac{11}{2} + 17x \right] - \frac{5}{2} + 5x$$

$$c3) \quad y = 20 * e^{-6x} - 17 * e^{-4x} + 52x e^{-4x}$$

Aufgabe 10.7.3

a) $\lambda^5 + 4\lambda^4 + 3\lambda^3 + 6\lambda^2 + 8\lambda + 6 = 0$

b) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$

c) $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

d) $\lambda^4 + 6\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 9 = 0$

Aufgabe 10.7.4

a) $y_h = c_1 * e^{-2x} + e^{-4x} [c_2 * \cos(3x) + c_3 * \sin(3x) + c_4 * x * \cos(3x) + c_5 * x * \sin(3x) + e^{-5x} [c_6 + c_7x + c_8x^2]$

b) $y_h = c_1 * e^{-2x} + c_2 * e^{-3x} + e^{-5x} [c_3 * \cos(3x) + c_4 * \sin(3x)] + e^{-4x} [c_5 * \cos(3x) + c_6 * \sin(3x)] + e^{-8x} [c_7 + c_8x]$

c) $y_h = e^{-2x} [c_1 + c_2x] + e^{-4x} [\cos(3x) (c_3 + c_4x + c_5x^2) + \sin(3x) (c_6 + c_7x + c_8x^2)]$

d) $y_h = c_1 * e^{-3x} + e^{-4x} [c_2 * \cos(5x) + c_3 * \sin(5x)] + c_4 * e^{-6x} + e^{-8x} [c_5 + c_6x + c_7x^2 + c_8x^3]$

Aufgabe 10.7.5

i) $y = -\frac{370}{3} e^{-2x} + 276.8 * e^{-4x} - \frac{485}{3} * e^{-5x} + 20 - 11.8 * \cos(3x) + 17.4 * \sin(3x)$

Aufgabe 10.7.6

i) $y = -\frac{235}{54} e^{-2x} + \frac{5}{9} x * e^{-2x} - \frac{112}{27} * e^{-5x} + 1 + \frac{5}{3} * x^2 * e^{-2x} + 7.5 * e^{-4x}$

Aufgabe 10.7.7

i) $y = -\frac{10}{17} e^{-2x} + e^{-3x} \left[-\frac{188}{85} * \cos(4x) + \frac{611}{340} * \sin(4x) \right] + 4 - 1.2 * \cos(5x) - 3 * \sin(5x)$

Aufgabe 10.7.8

a) $\lambda^8 + 19\lambda^7 + 168\lambda^6 + 878\lambda^5 + 2821\lambda^4 + 5531\lambda^3 + 6378\lambda^2 + 3940\lambda + 1000 = 0$

b) aus Rechner

$\lambda_{12} = -1$

$\lambda_{345} = -2$

$\lambda_6 = -5$

$\lambda_{78} = -3 \pm j4$

c) $y_h = e^{-x} [c_1 + c_2x] + e^{-2x} [c_3 + c_4x + c_5x^2] + c_6 * e^{-5x} + e^{-3x} [c_7 * \cos(4x) + c_8 * \sin(4x)]$

d) $y_s = A + B * \cos(x) + C * \sin(x) + Dx^2 * e^{-x} + E * \cos(2x) + F * \sin(2x)$

Aufgabe 10.8.1

a) $y_1' = y_2 \quad y_2' = y_3 \quad y_3' = y_4 \quad y_4' = -6y_4 - 8y_3 - 7y_2 - 20y_1 + 100$

b) $y_1' = y_2 \quad y_2' = y_3 \quad y_3' = y_4 \quad y_4' = -9y_4 - 7y_3 - 20y_2 - 80y_1 + 200$

c) $y_1' = y_2 \quad y_2' = y_3 \quad y_3' = -8y_1 - 9y_2 - 8y_3 + 20 * \sin(4x)$

d) $y_1' = y_2 \quad y_2' = -16 + 20e^{-4x} - 8y_1$

e) $y_1' = y_2 \quad y_2' = y_3 \quad y_3' = y_4 \quad y_4' = y_5 \quad y_5' = -6y_5 - 8y_4 - 9y_3 - 8y_2 - 20y_1 + 80$

Aufgabe 10.8.2

a) $y_1' = y_2 \quad y_2' = y_3 \quad y_3' = 18 * \cos(x) - 18y_2 * y_3 - 13y_1^2$

b) $y_1' = y_2 \quad y_2' = \sqrt{20x * \sin(x) - 2y_1^2 * y_2^3 - 18 * y_1 * x}$

c) $y_1' = y_2 \quad y_2' = y_3 \quad y_3' = \frac{1}{y_2} [30x + 90 - 8y_3 * y_1 - y_1^2 - y_2]$

d) $y_1' = y_2 \quad y_2' = y_3 \quad y_3' = y_4 \quad y_4' = 20x + 30 - 3y_4 * y_2 - 8 * y_1^2 * y_3 - y_1^4$

Aufgabe 10.8.3 (ohne Probe)

- a) $a_3 \cdot y_1' + a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot a_3 \cdot y_1'' = f(x)$ $a_3 \cdot a_2 \cdot y_2'' + a_3 \cdot y_2' + a_1 \cdot y_2 = a_3 \cdot f(x)$
 b) $a_2 \cdot a_3 \cdot y_1'' + a_1 \cdot a_3 \cdot y_1' + y_1 = a_3 \cdot f(x)$ $a_1 \cdot a_3 \cdot y_2' + a_2 \cdot a_3 \cdot y_2'' + y_2 = f(x)$
 c) $a_1 \cdot a_2 \cdot y_2' + a_1 \cdot a_3 \cdot y_2'' + y_2 = f(x)$ $a_1 \cdot a_3 \cdot y_1'' + a_2 \cdot a_1 \cdot y_1' + y_1 = a_2 \cdot f(x) + a_3 \cdot f(x)$
 d) $a_1 \cdot a_2 \cdot y_1'' + a_3 \cdot y_1' + y_1 = a_2 \cdot f(x)$ $a_2 \cdot a_1 \cdot y_2'' + a_3 \cdot y_2' + y_2 = f(x) + a_3 \cdot f(x)$

Aufgabe 10.8.4 (ohne Probe)

- a) $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot y_1''' + a_4 \cdot (a_1 + a_2) \cdot y_1'' + a_3 \cdot y_1' + y_1 = f(x) + a_3 \cdot f(x)$
 b) $a_1 \cdot a_2 \cdot y_2''' + a_1 \cdot a_3 \cdot y_2'' + y_2' + \frac{y_2}{a_4} = f'(x)$
 c) $y_1'''' \cdot a_1 \cdot a_4 + y_1'' \left(1 + \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_4}{a_2} \right) + \frac{y_1}{a_2 \cdot a_3} = \frac{f'(x)}{a_3} + a_4 f'''(x)$

Aufgabe 10.9.1

- a) $y(x=0.5) = 5.9205$ b) $y(x=0.5) = 4.1555$ c) $y(x=0.5) = 4.4786$
 d) $y(x=0.5) = 1.1003$ e) $y(x=0.5) = 1.2992$ f) $y(x=0.5) = 0.5157$
 g) $y(x=0.5) = 2.0880$ h) $y(x=0.5) = 1.2476$

Aufgabe 10.9.2

- a) $y(x=0.5) = 6.1435$ b) $y(x=0.5) = 4.6666$ c) $y(x=0.5) = 4.5024$
 d) $y(x=0.5) = 1.0762$ e) $y(x=0.5) = 1.2835$ f) $y(x=0.5) = 0.3881$
 g) $y(x=0.5) = 2.0316$ h) $y(x=0.5) = 1.2895$

Aufgabe 10.9.3

- a1) $y(x=0.2) = 1.7771$ a2) $y(x=0.2) = 1.7207$ a3) $y(x=0.2) = 1.7729$
 a4) $y(x=0.2) = 1.7710$ a5) $y(x=0.2) = 1.7252$
 b1) $y(x=0.2) = 10.2588$ b2) $y(x=0.2) = 8.6398$
 b3) $y(x=0.2) = 10.1338$ b4) $y(x=0.2) = 10.0264$ b5) $y(x=0.2) = 8.7200$
 c1) $y(x=0.2) = 3.3616$ c2) $y(x=0.2) = 2.4936$ c3) $y(x=0.2) = 3.1884$
 c4) $y(x=0.2) = 3.2377$ c5) $y(x=0.2) = 2.4804$

Aufgabe 10.9.4

- a1) $y(x=0.2) = 1.7578$ a2) $y(x=0.2) = 1.6988$ a3) $y(x=0.2) = 1.7493$
 a4) $y(x=0.2) = 1.7456$ a5) $y(x=0.2) = 1.7080$
 b1) $y(x=0.2) = 10.0184$ b2) $y(x=0.2) = 8.4040$
 b3) $y(x=0.2) = 9.7780$ b4) $y(x=0.2) = 9.5827$ b5) $y(x=0.2) = 8.5299$
 c1) $y(x=0.2) = 3.3832$ c2) $y(x=0.2) = 2.4976$ c3) $y(x=0.2) = 3.0601$
 c4) $y(x=0.2) = 3.1469$ c5) $y(x=0.2) = 2.4646$

Aufgabe 10.9.5

- a) $y(x=0.2) = 1.7402$ b) $y(x=0.2) = 0.0362$ c) $y(x=0.2) = 0.3268$

Aufgabe 10.10.1

- a) $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + - \dots$ b) $y = 2 - 3x + 3x^2 - \frac{13}{6}x^3 + \frac{13}{12}x^4 - + \dots$
- c) $y = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + - \dots$ d) $y = 12 + 6x^2 - \frac{1}{2}x^4 + - \dots$
- e) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - + \dots$ f) $y = x - \frac{1}{3}x^3 + - \dots$
- g) $y = 2 + 4x + 0x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x^4 + - \dots$ h) $y = 2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - + \dots$
- i) $y = 2 + x^2 + \frac{3}{4}x^4 - + \dots$

Aufgabe 10.11.1

- a) $\Delta y'' + 3\Delta y' + 12\Delta y = 0$ b) $\Delta y'' + 8\Delta y' + 10\Delta y = 0$ c) $\Delta y' + 64\Delta y = 0$

Aufgabe 10.12.1

- a) DGL stabil b) DGL instabil c) DGL stabil
- d) DGL instabil e) DGL stabil

Aufgabe 11.3.1

- a) $y(t) = 5 * s(t-8s)$
- b) $y(t) = 7[s(t-12s) - s(t-15s)]$
- c) $y(t) = \frac{4}{1s}r(t) - \frac{6}{1s}r(t-3s) + \frac{2}{1s}r(t-9s)$
- d) $y(t) = 3s(t-2s) + \frac{3}{2s}r(t-2s) - \frac{3}{1s}r(t-4s) + \frac{3}{2s}r(t-6s) - 3s(t-6s)$
- e) $y(t) = 4\exp\left[-\frac{t-6s}{2s}\right] * s(t-6s)$

Aufgabe 11.3.2

- a) $y(t) = \frac{t}{\omega_1} - \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2}$ b) $y(t) = \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{\cos(\omega_1 t)}{\omega_1^2}$
- c) $y(t) = \frac{1}{\omega_1^2 + a^2} [a * \cos(\omega_1 t) + \omega_1 * \sin(\omega_1 t) - a * e^{-at}]$ d) $y(t) = \frac{1}{12}t^4$

Aufgabe 11.4.1

- a) $Y(p) = \frac{a}{p^2 - a^2}$ b) $Y(p) = \frac{p}{p^2 - a^2}$
- c) $Y(p) = \frac{1}{(p + a)^2}$ d) $Y(p) = \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega_1^2}$
- e) $Y(p) = \frac{\omega_1}{(p + a)^2 + \omega_1^2}$

Aufgabe 11.6.1

- a) $Y(p) = \frac{6}{p} - \frac{4}{p^2}$ b) $Y(p) = \frac{10p - 24}{p^2 + 16} + \frac{8}{p}$
- c) $Y(p) = 50 \frac{1}{p + 8} + \frac{9}{p}$ d) $Y(p) = \frac{8}{p + 2} + \frac{6p}{p^2 + 81}$
- e) $Y(p) = 96 \frac{1}{p^5} + \frac{40}{p^3}$

